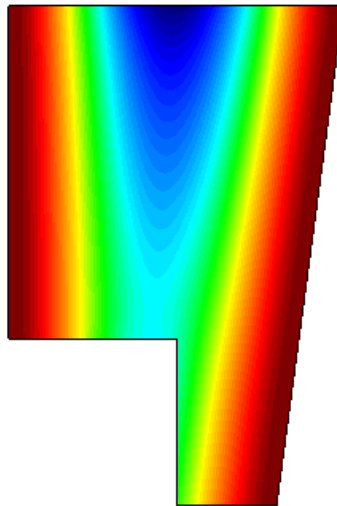


MICCPB
2014-2015

L-60 Placa plana de hormigón

Trabajo de curso – Ingeniería de estructuras



Irene Martínez Villalonga
46467219-C

Índice

PROBLEMA L-60.....	3
1. Análisis de una placa plana	4
2. Estudio de convergencia	7
3. Determinación sobrecarga máxima	10
4. Conclusiones.....	13

PROBLEMA L-60

La figura muestra una placa plana de hormigón armado sujeta a una carga uniformemente repartida y con las condiciones de apoyo indicadas.

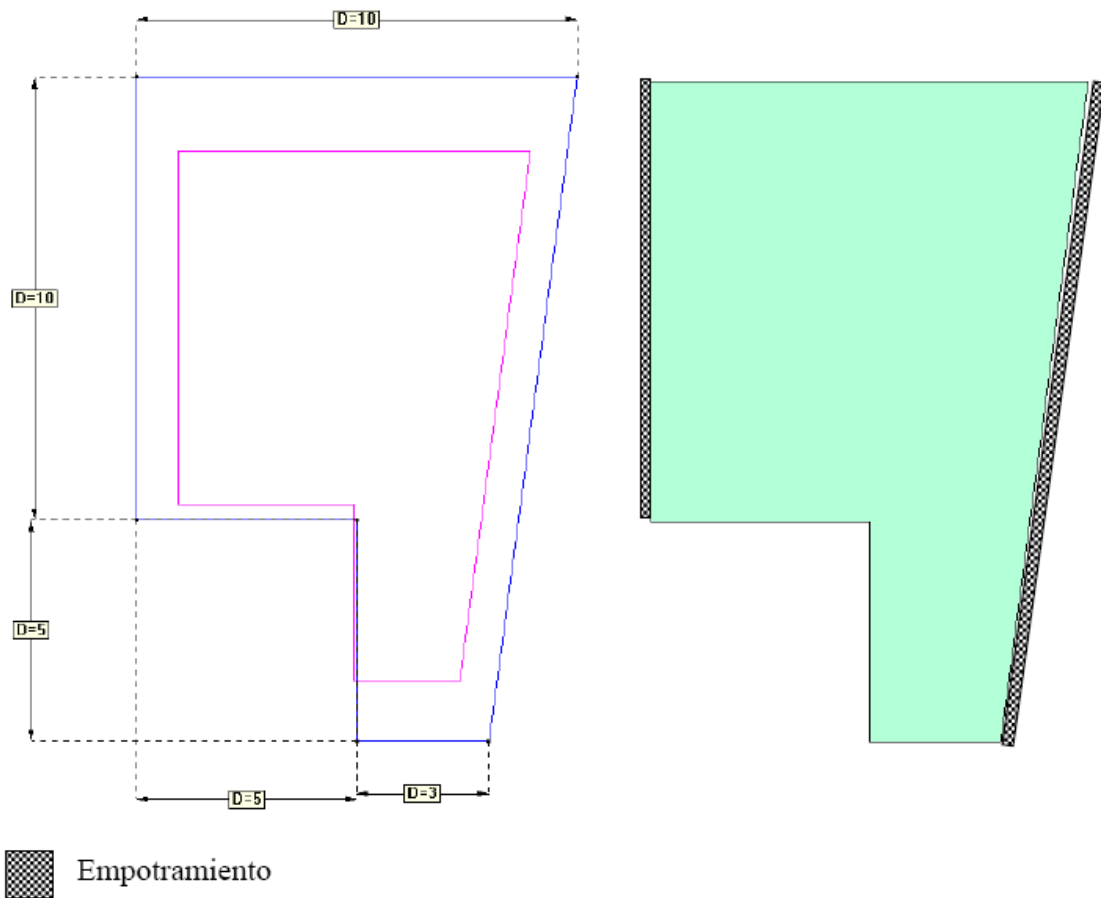
Calcule el valor máximo de la carga que satisface las restricciones que se indican:

- 1) Las tracciones máximas en cualquier punto de la presa no deben superar los 20MPa
- 2) Las compresiones máximas en cualquier punto de la presa no deben superar los 12MPa
- 3) Tomar los valores de E y ν de un hormigón estándar
- 4) El espesor de la placa es de 0.25m

Cargas actuantes:

- a) Peso propio
- b) Peso propio + carga uniforme

Las dimensiones en metros de la placa:



1. Análisis de una placa plana

Las placas planas se clasifican en delgadas si la relación espesor/ancho ≤ 0.10 (teoría de Kirchhoff), en caso contrario se trata de placas gruesas y se analizan con la teoría de Reissner-Mindlin (ésta también puede analizar el caso de placa delgada). En el presente ejercicio nos encontramos ante un caso de placa delgada, ya que ancho \gg espesor y por tanto se aplicará la teoría de placas de Kirchhoff. Las hipótesis fundamentales de dicha teoría son:

- 1) En los puntos del plano medio $u=v=0 \rightarrow$ se mueven sólo verticalmente.
- 2) Todos los puntos contenidos en una normal al plano medio tienen aproximadamente el mismo desplazamiento vertical.
- 3) La tensión normal σ_z es despreciable.
- 4) Los puntos sobre rectas normales al plano medio antes de la deformación, permanecen sobre rectas también ortogonales a la deformada del plano medio después de la deformación.

A continuación se resume la teoría básica de placas planas para la teoría de Kirchhoff, con los campos de desplazamientos, deformaciones, tensiones y ecuaciones de equilibrio.

- **Campo de desplazamientos**

Todas las secciones perpendiculares al eje prismático z se deforman en su plano y de manera idéntica, por lo que tenemos que el campo de desplazamientos es:

$$u(x, y, z) = -z\theta_x(x, y)$$

$$v(x, y, z) = -z\theta_y(x, y)$$

$$w(x, y, z) \approx w(x, y)$$

$$\mathbf{u} = [w, \theta_x, \theta_y]^T$$

$$\text{Dónde } \theta_x = \frac{\partial w}{\partial x} \quad \text{y} \quad \theta_y = \frac{\partial w}{\partial y}$$

- **Campo de deformaciones**

Derivando los desplazamientos se obtienen las deformaciones. En este caso como $\sigma_z \cong 0$ entonces el trabajo de deformación $\sigma_z \cdot \varepsilon_z = 0$ y puede prescindirse de ε_z en el análisis. Las deformaciones transversales sobre los ejes xz e yz también son nulas. De modo que definimos el vector de deformaciones significativas como:

$$\varepsilon = \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -z \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \\ -z \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \\ -2z \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \end{Bmatrix}$$

- **Campo de tensiones**

A partir de las deformaciones expresadas, las tensiones significativas son:

$$\sigma = D \cdot \varepsilon = [\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}]$$

- **Relación tensión-deformación**

De la ecuación anterior de tensiones se puede ver la relación que éstas tienen con la deformación. En dicha ecuación aparece la matriz D que es la matriz de constantes elásticas. Para el caso de tensión plana ($\sigma_z=0$) la matriz D resulta:

$$D = \frac{E}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix}$$

- **Ecuaciones de equilibrio**

1) Equilibrio de fuerzas verticales

$$\frac{\partial Q_x}{\partial x} + \frac{\partial Q_y}{\partial y} + q = 0$$

2) Equilibrio de momentos

$$\frac{\partial M_y}{\partial y} + \frac{\partial M_{xy}}{\partial x} + Q_y = 0$$

$$\frac{\partial M_x}{\partial x} + \frac{\partial M_{xy}}{\partial y} + Q_x = 0$$

3) Ecuación general

$$\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = \frac{q}{D}$$

$$D = \frac{Et^3}{12(1-\nu^2)}$$

- **Discretización**

En la teoría de placas se pueden usar tanto elementos triangulares de 3 y 6 nodos como cuadrangulares de 4 nodos. Cabe destacar que los elementos triangulares de 3 nodos se utilizarán en el caso de tener una placa delgada (teoría de Kirchhoff) y que los elementos triangulares de 6 nodos y cuadrangulares de 4 nodos podrán utilizarse tanto en placas delgadas como gruesas (teoría Reissner-Mindlin). Por tanto, en el caso de estudio, al tener la placa una longitud mucho mayor que su espesor nos decantaremos por realizar la discretización con elementos triangulares de 3 nodos; no obstante, estudiaremos la convergencia de los desplazamientos con los 3 elementos para ilustrar sus diferencias.

2. Estudio de convergencia

Antes de proceder a aplicar sobrecargas en la placa para ver su comportamiento, realizaremos un análisis de convergencia de los desplazamientos según elementos triangulares de 3 y 6 nodos y elementos cuadrangulares de 4 nodos.

Para trabajar con una placa se debe activar el módulo *Plates* de Ramseries, una vez activado se procede a definir la geometría de la placa. La placa se encuentra empotrada en sus dos bordes extremos laterales y libre en los restantes. La geometría y condiciones de contorno se muestran en las siguientes figuras:

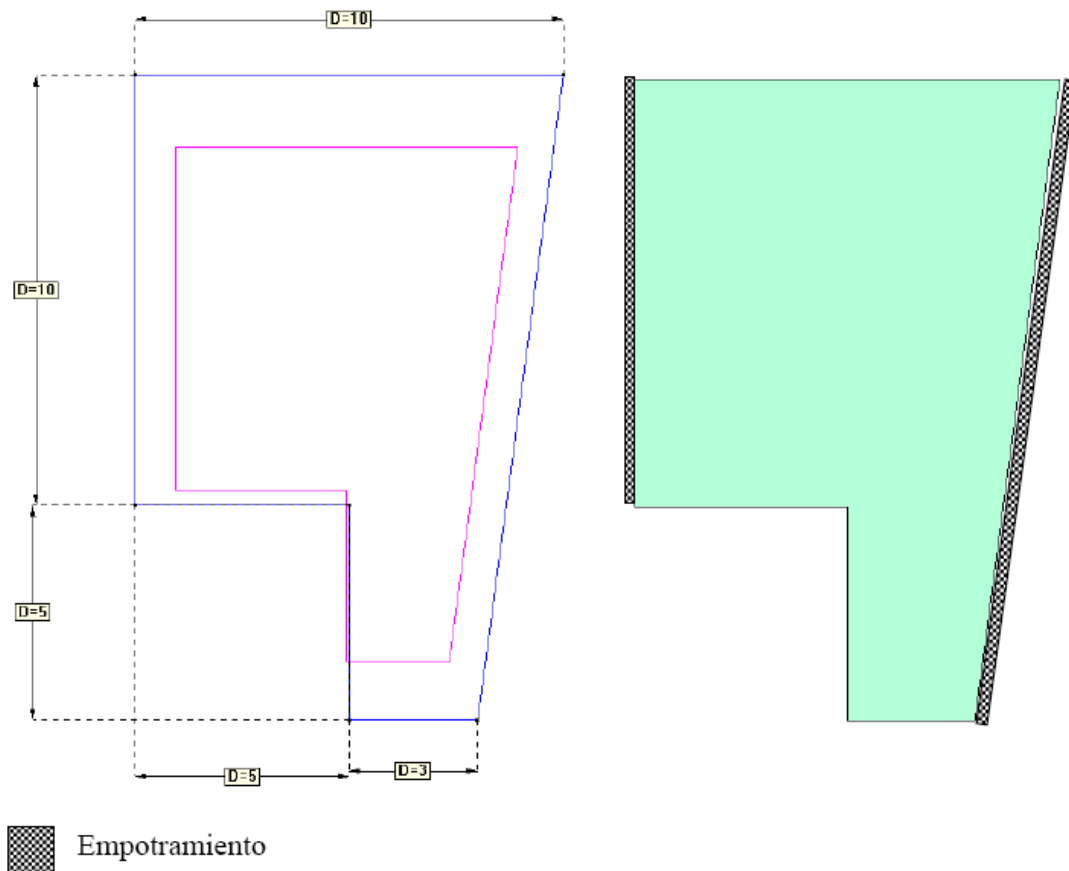


Figura 1: Geometría y condiciones de contorno

A continuación se define el hormigón que constituirá la placa. Se ha impuesto:

$E=30$ GPa $\nu=0.20$ $\gamma=25000$ N/m³ espesor=0.25m

Una vez definidos los materiales y las condiciones de contorno se puede proceder a mallar la placa considerando el peso propio únicamente para analizar la convergencia de los desplazamientos para distintos elementos y después poder hacer el análisis tensional con la sobrecarga.

Triángulo 3		
Malla	GL	Desplazamiento(m)
1	286	0.0026083
0,8	442	0.0026725
0,6	762	0.0026384
0,4	1674	0.002593
0,3	2922	0.002594
0,2	6490	0.0025937
0,1	25550	0.0025973

Triángulo 6		
Malla	GL	Desplazamiento(m)
1	1042	0.0039031
0,8	1640	0.0039106
0,6	2882	0.0039265
0,4	6446	0.0039324
0,3	11362	0.0039357
0,2	25472	0.0039375

Cuadrilátero 4		
Malla	GL	Desplazamiento(m)
1	278	0.0037853
0,8	402	0.0038127
0,6	718	0.0038649
0,4	1560	0.0039052
0,3	2694	0.0039201
0,2	6242	0.0039269
0,1	24860	0.0039357

Se puede apreciar como los elementos triangulares de 6 nodos y los cuadriláteros de 4 tienen unos valores similares y a su vez difieren de los desplazamientos que proporciona el elemento triangular de 3 nodos. En el gráfico siguiente se puede apreciar más claramente dicho comportamiento:

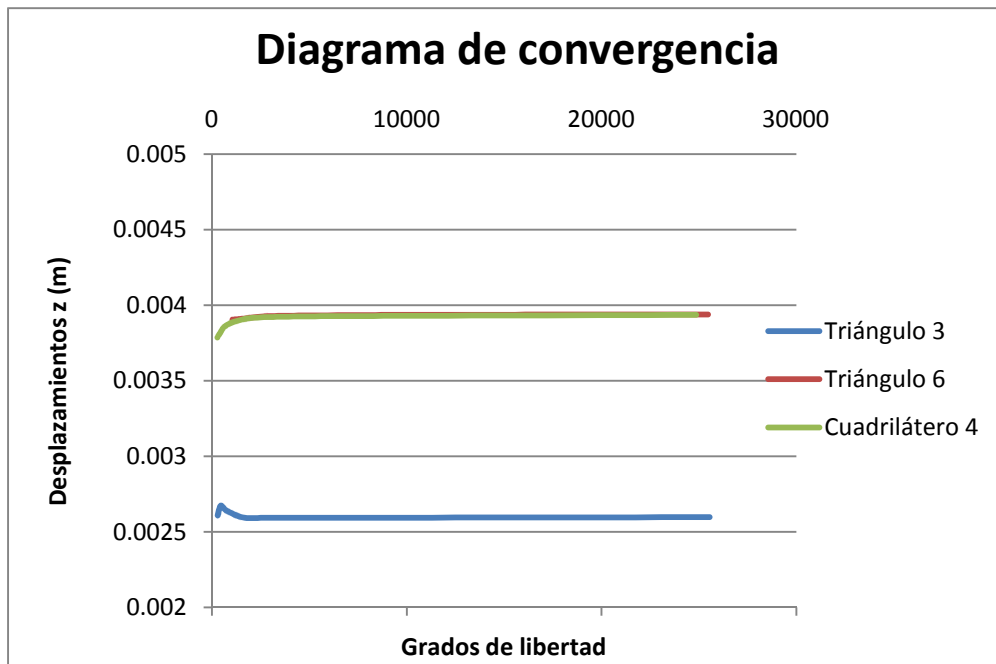


Figura 2: Diagrama de convergencia de desplazamientos

Tal como comentamos en el primer apartado del trabajo, al tratarse de una placa delgada analizaremos su estado tensional mediante triángulos de 3 nodos ya que nos proporcionarán unos resultados fiables y con menor coste computacional. Por otra parte, se puede ver como dicho elemento converge bastante rápido, por lo que se realizará un mallado de 0,2m puesto que tendrá menor coste computacional que si fuese de 0,1m y nos proporcionará unos resultados fiables igualmente.

3. Determinación sobrecarga máxima

En primer lugar analizaremos las tensiones y desplazamientos que se producen en el caso en que sólo actúa el peso propio de la placa para poder tener una referencia sobre qué sobrecarga máxima podremos aplicar.

a) Peso propio (PP)

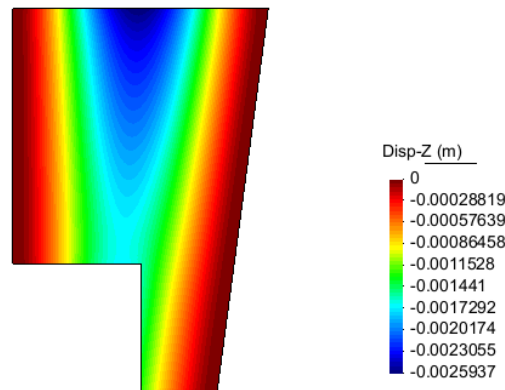


Figura 3: Desplazamientos en z caso PP

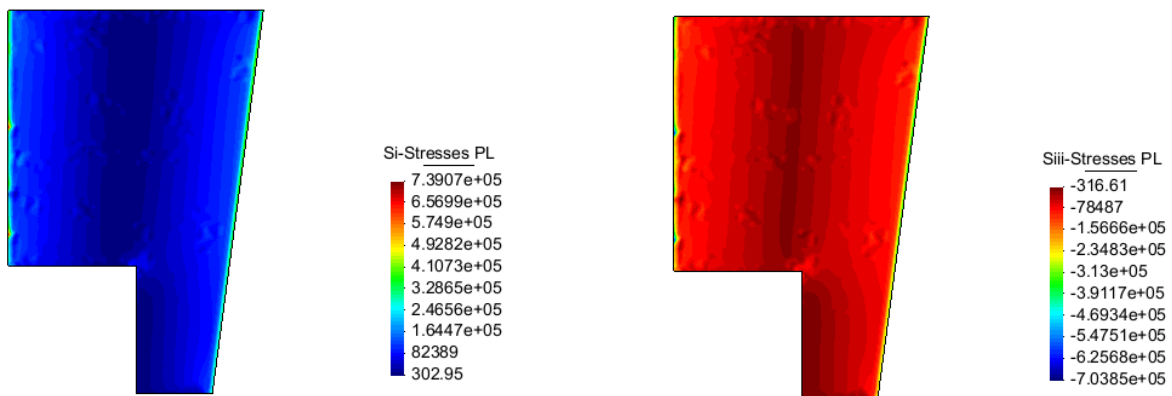


Figura 4: Tensiones principales σ_1 y σ_3 (sólo PP)

En primer lugar se observa que los desplazamientos son máximos en el punto medio del borde libre más largo como era de esperar, ya que tenemos los bordes laterales empotrados y ahí el desplazamiento será 0 e irá incrementando a medida que se aleje de dichos bordes.

Por otra parte, se puede ver como las mayores tracciones se generan en los empotramientos, concretamente en la cara vista de la placa, siendo la máxima 0,74MPa. Por su parte las compresiones se producen en la cara oculta de la placa,

también en los empotramientos siendo el valor máximo de 0,70MPa. Por tanto, tenemos aún mucho margen para imponer una sobrecarga puesto que la tracción límite ha de ser 20MPa y la compresión límite 12MPa.

a) Peso propio (PP) + Sobrecarga (SC)

Inicialmente se ha impuesto una sobrecarga de 80e3 N/m² y se ha obtenido:

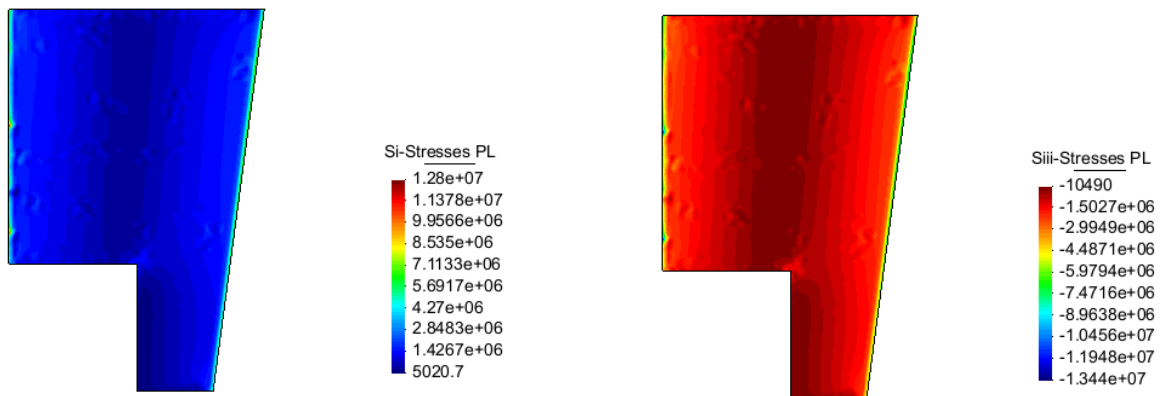


Figura 5: Tensiones principales σ_1 y σ_3 (PP+SC)

Se puede observar que aunque las tracciones cumplan ($12,8\text{MPa} < 20\text{MPa}$), las compresiones no cumplen la restricción ya que $13,4\text{MPa} > 12\text{MPa}$. Por tanto, se ha ido reduciendo la sobrecarga hasta encontrar la máxima que hace que se cumplan las condiciones. Dicha sobrecarga se ha considerado de **71,8e3N/m²** y se han obtenido son los siguientes resultados:

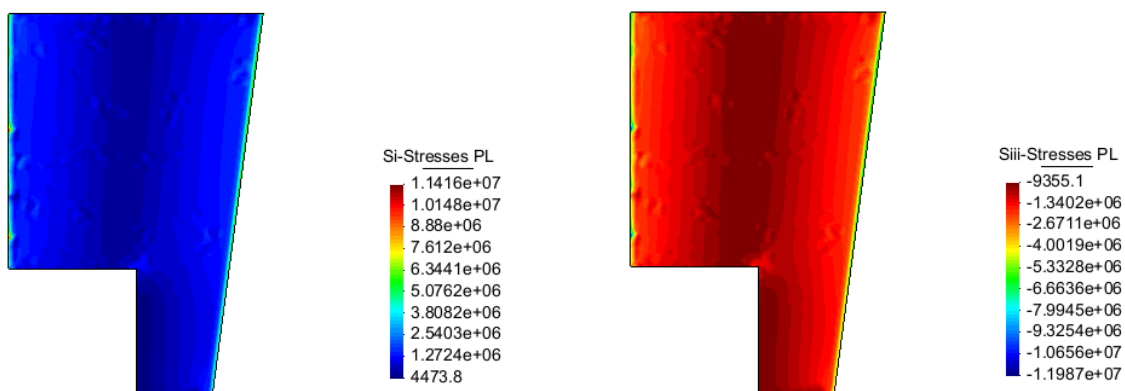


Figura 6: Tensiones principales σ_1 y σ_3 (PP+SC)

En este caso las tracciones que se producen alcanzan un valor máximo de 11,42MPa y son por tanto inferiores a la limitación de 20MPa. Por otra parte vemos que las

compresiones son más restrictivas en cuanto a la carga a aplicar, en este caso alcanzan un valor de 11,987MPa y por tanto es el valor más cercano a la limitación de 12MPa buscado. Cabe decir que se ha dado por bueno este valor debido a que se trata de un trabajo académico, pero en la vida real seguramente se habría elegido un valor inferior para quedar del lado de la seguridad.

Puesto que ya se tiene la carga límite, a continuación se muestran los desplazamientos y esfuerzos que se dan en la placa:

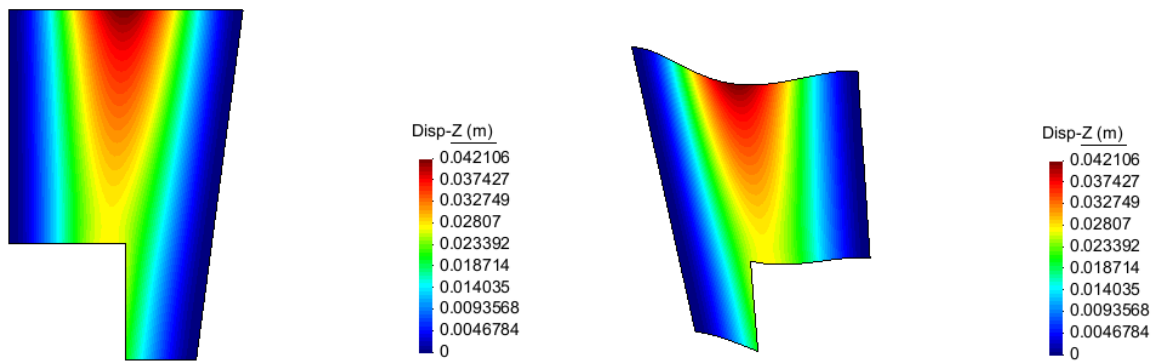


Figura 7: Desplazamiento en z y deformada

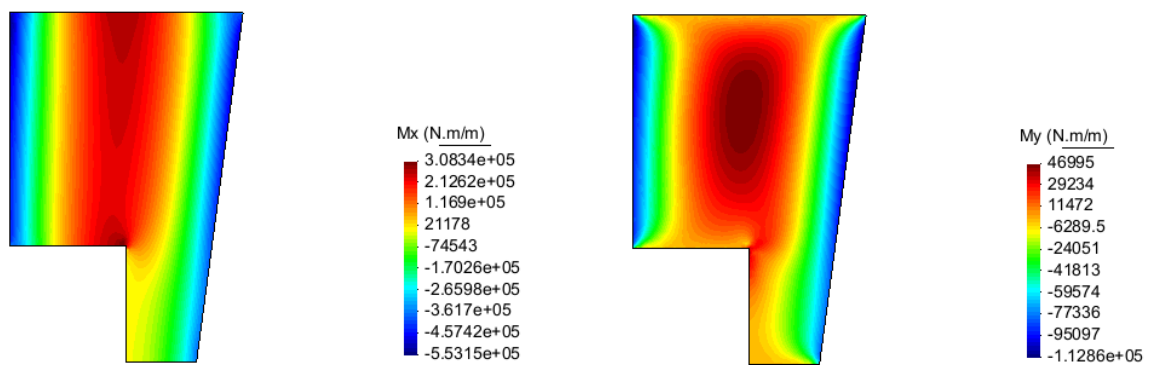


Figura 8: Momentos flectores Mx y My

Respecto a los desplazamientos se puede ver como el valor máximo se da en la zona central superior, donde mayor es la distancia de empotramiento a empotramiento, tal como pasaba cuando sólo actuaba el peso propio. El valor máximo de dicho desplazamiento es de 4,2cm, cuando en el caso del peso propio era de 0,25cm, por tanto, teniendo en cuenta la gran carga que se le ha aplicado la placa no ha tenido un descenso desorbitado. Por otra parte, los momentos flectores se puede observar que son máximos en la zona central debido al doble empotramiento, por lo que se puede decir que la placa tiene el comportamiento esperado.

4. Conclusiones

Con la realización de este trabajo se ha podido comprobar que el comportamiento de la placa delgada empotrada era el esperado produciéndose los mayores desplazamientos en el punto medio del borde libre más largo, puesto que está más lejos de los empotramientos, y que las tensiones se producen en dichos empotramientos.

Cabe destacar que no hemos tenido concentración de tensiones en ningún punto crítico, por lo que no ha sido necesario un refinamiento de la malla en ninguna zona.

Por último se ha podido comprobar cómo la carga máxima soportada por la placa alcanza los $71,8 \text{ kN/m}^2$, lo que resulta un valor considerable si se tiene en cuenta que la placa es de hormigón, tiene espesor de 25 cm y que sólo está empotrada en sus bordes extremos laterales.