

ENGINYERIA D'ESTRUCTURES

Màster en Enginyeria de Camins, Canals i Ports

Treball Final – CURS 2018-2019 (Q1)

L31 i S-24. Dimensionament i càlcul d'un pont de quatre carrils i una presa de formigó.

Marc Arranz

Barcelona, Gener, 2019



INTRODUCCIÓ I OBJECTIUS

La finalitat d'aquest treball és reflectir els coneixements que s'han anat adquirint al llarg del curs d'estructures. Per un costat s'han après els conceptes teòrics necessaris per poder entendre el funcionament intern dels programes d'elements finits i per una altra banda s'ha solucionat, mitjançant un programa d'elements finits, diversos problemes pràctics a fi de familiaritzar-nos amb la seva metodologia i el seu potencial.

Al llarg d'aquest treball es pretén donar una solució a dos problemes. En el primer es demana trobar la carrega repartida màxima que es capaç de suportar un pont d'acer de quatre carrils sense excedir en 400 Mpa la tensió de Von Misses (L-31). Per altre costat, també es demana calcular les tensions de tracció d'una presa de formigó de 80 metres d'altura per determinar si en algun punt aquesta excedeix els 0.01 Mpa (S-24).

Tal i com hem estudiat, el MEF es basa en la discretització de la estructura a resoldre, en una malla de diferents elements amb una geometria i mides determinats, i l'aplicació del principi de treballs virtuals (TPV) per resoldre els càlculs de l'estructura un cop tots els elements son assemblats. Així s'obtenen els desplaçaments, tensions i deformacions experimentades per la estructura, la qual està sotmesa a unes carregues i condicions de contorn concretes.

Per tal de poder realitzar els càlculs d'elements finits amb el programa **Gid i Ramseries**, serà necessari per cadascun dels problemes:

- Generar la geometria
- Crear una malla
- Definir les propietats de cadascun dels seus materials
- Definir les seves càrregues i condicions de contorn
- Estudiar la convergència de les solucions

A més a més, la base teòrica de cada problema serà explicada al inici de la seva resolució.

NOTA: Totes les figures que venen a continuació s'han generat amb el programa **GID i Ramseries**.

1. Resolució problema del Pont d'acer de quatre carrils (L-31)

L'objectiu d'aquest problema es determinar la carrega repartida màxima que es capaç de suportar un pont d'acer de quatre carrils sense que la tensió de Von Misses superi els 400 Mpa.

Geometria:

El pont està format per quatre bigues amb forma de calaix de 45 metres de longitud i 2 mènsules, formats mitjançant lamines d'acer planes de les dimensions que s'observa a la (Figura 1).

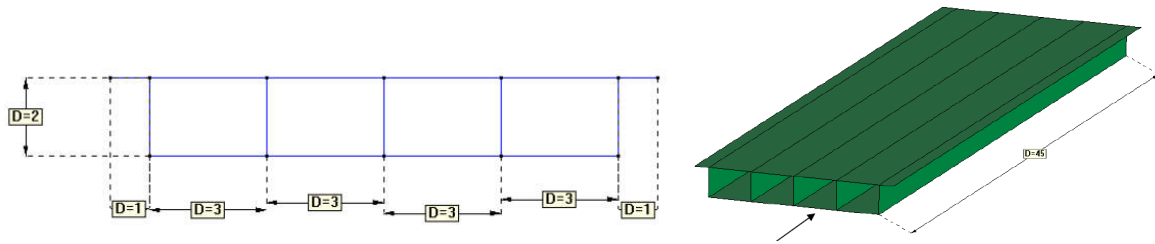


Figura 1. Perfil longitudinal i esquema en perspectiva del problema

Materials:

Les lamines tenen un espessor de 0.125 metres i són fabricades mitjançant un acer estàndard. Per definir els paràmetres que caracteritzen l'acer estàndard s'han adoptat els valors del mòdul de Young (E) i coeficient de Poisson (ν) que apareixen assignats al acer a la llibreria de materials de GID. Aquests valors es poden veure resumits a la següent taula:

Acer estàndard	
E	$2.1 \cdot 10^{11} \frac{N}{m^2}$
ν	0.3

Taula 1. Paràmetres Acer estàndard

Condicions de contorn i carregues:

El pont es troba simplement recolzat al cadascun dels seus extrems. A més de trobar-se sotmesa al pes propi i a una carrega uniformement repartida a la seva superfície superior de valor variable q (paràmetre de dimensionament).

Pre-procés

Per tal de resoldre el problema en 3 dimensions, primer de tot digitalitzem mitjançant el programa Ramseries la geometria del problema mitjançant punts, línies i superfícies (Figura 2).

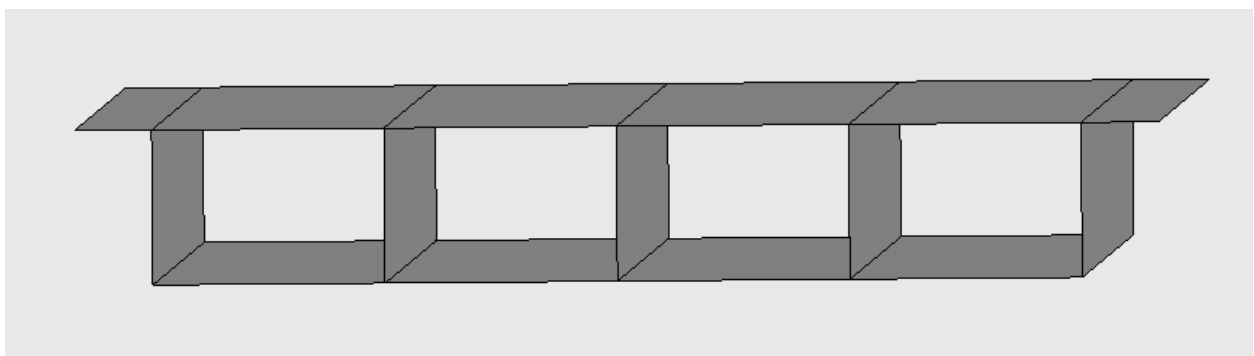


Figura 2. Geometria del problema al Ramseries.

Seguidament, es defineix les diferents superfícies com a lamines planes d'acer amb el grossor de 0.125 metres i paràmetres del acer estàndard indicats a la Taula 1 (Figura 3).

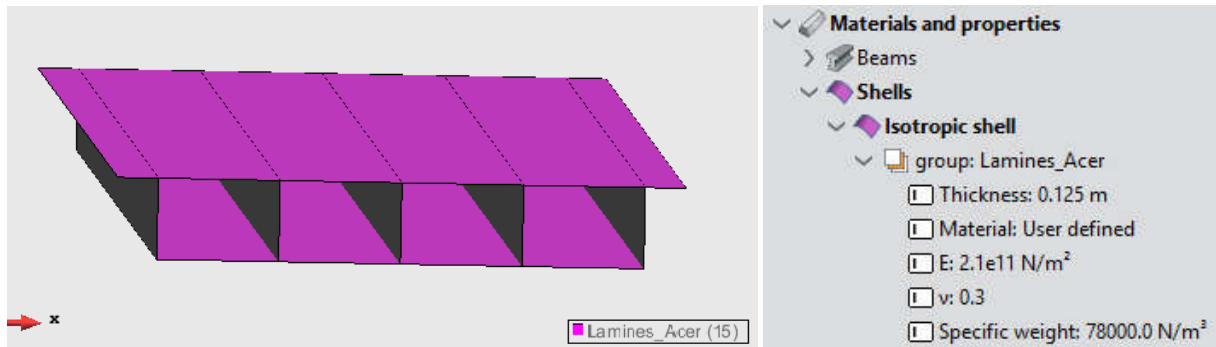


Figura 3. Definició del material de les lamines d'acer

Així mateix, també es defineix les condicions de contorn (Figura 4 - extrems simplement recolzats) i s'apliquen les carregues de pes propi i carrega uniformement repartida (Figura 5).

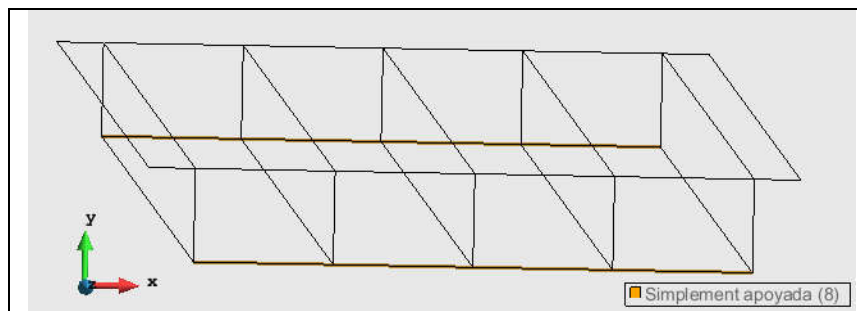


Figura 4. Condió de bigues simplement recolzades

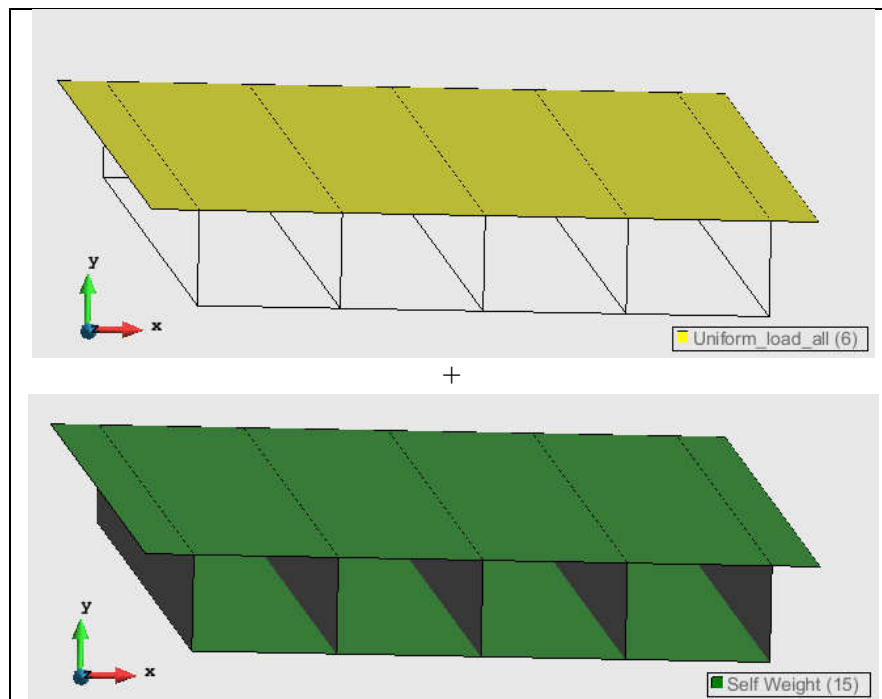


Figura 5. Carrega uniformement repartida i pes propi

Finalment, es discretitza el model mitjançant malles diferents que s'aniran modificant fins garantir la convergència de la solució (Figura 6). Un cop la solució convergeixi, s'escollirà aquella que abans s'hagi aproximat al resultat final per tal de ser utilitzada com a malla per iterar el valor de

la carrega repartida i obtenir la carrega repartida màxima que provoca una tensió de Von Misses pròxima a 400 Mpa.

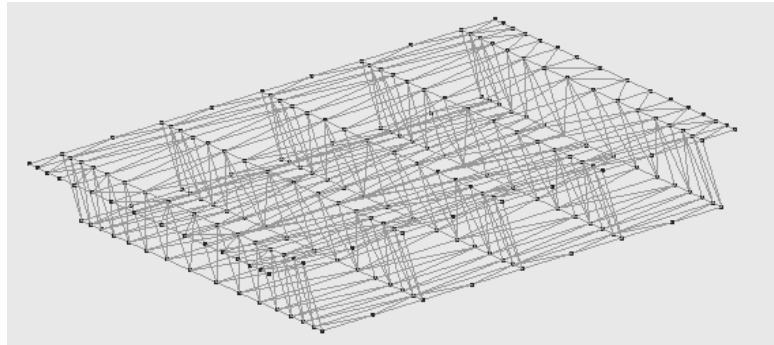


Figura 6. Malla de formada d'elements tetraèdrics de 3 nodes

Càlculs i teoria de lamines planes:

Un cop demanem al programa d'elements finits que efectui els càlculs (Ramseries), el programa detecta que es tracta d'un problema de lamines planes i comença a calcular i assemblar totes les matrius de rigidesa, vector de forces nodals equivalents, vector de forces puntuals, per acabar resolent el problema i obtenir el valor de les seves tensions, deformacions i desplaçaments.

Al trobar-nos en un problema de lamines planes amb relació espessor longitud ($\frac{t}{L} = \frac{0.125}{45} = 0.002$), es pot utilitzar tant la teoria de Kirchhoff, que obté bons resultats per problemes amb $\frac{t}{L} < 0.005$ o Reissner Mindlin que requerirà integració reduïda o camp de deformacions imposades.

La teoria de Reissner Mindlin al ser vàlida tant per problemes de plaques gruixudes com primes, és més utilitzat que la teoria de Kirchhoff en programes d'elements finits. És per aquest motiu que la formulació exposada a continuació serà la de R.M aplicada a lamines planes.

La teoria de lamines planes es caracteritza per caracteritzar els elements amb el sistema de coordenades propi (local) de cadascun dels seus elements, per la seva posterior transformació al sistema de referència global per poder fer el assemblatge de les diferents matrius. En el cas que hi hagin nodes coplanaris, els girs $\theta_{x'}$ i $\theta_{y'}$ seran mantinguts en coordenades locals per evitar zeros a la diagonal d'algunes matrius.

Les hipòtesis de Reissner Mindlin són les següents:

1. $u'(x', y', z') = u_0(x', y') \quad z' \cdot \theta'_x(x', y') \quad \text{on} \quad \theta'_x = \frac{d(w)}{dx'} + \phi_{x'}$
2. $v'(x', y', z') = v_0(x', y') \quad z' \cdot \theta'_y(x', y') \quad \text{on} \quad \theta'_y = \frac{d(w)}{dy'} + \phi_{y'}$
3. $w'(x', y', z') = w_0(x', y')$

A partir d'aquestes es pot obtenir el camp de deformacions com es pot veure a continuació:

On: ($m = \text{membrana} ; f = \text{flexió} ; c = \text{tallant}$)

$$\varepsilon = \begin{pmatrix} \varepsilon'_m \\ \ddot{0} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \varepsilon'_f \\ \varepsilon'_c \end{pmatrix} = \begin{matrix} \varepsilon'_x \\ \varepsilon'_y \\ \gamma'_{xy} \\ \gamma'_{xz} \\ \gamma'_{yz} \end{matrix} = \begin{matrix} \frac{du'}{dx'} \\ \frac{dv'}{dy'} \\ \frac{du'}{dy'} + \frac{dv'}{dx'} \\ \frac{du'}{dz'} + \frac{dw'}{dx'} \\ \frac{dv'}{dz'} + \frac{dw'}{dy'} \end{matrix} = \begin{matrix} \frac{du'_0}{dx'} \\ \frac{dv'_0}{dy'} \\ \frac{du'_0}{dy'} + \frac{dv'_0}{dx'} \\ \ddot{0} \\ 0 \end{matrix} + \begin{matrix} z \cdot \frac{d\theta'_x}{dx'} \\ z \cdot \frac{d\theta'_y}{dy'} \\ z \cdot \left(\frac{d\theta'_x}{dy'} + \frac{d\theta'_y}{dx'} \right) \\ \frac{dw'_0}{dx'} \phi'_x \\ \frac{dw'_0}{dy'} \phi'_y \end{matrix}$$

Un cop tenim el camp de deformacions podem trobar el camp de les tensions multiplicant les components de la matriu de deformacions per les seves respectives matrius constitutives, que relacionen les tensions amb les deformacions.

$$\sigma' = \begin{pmatrix} \sigma'_{m+f} \\ \sigma'_c \end{pmatrix} = \begin{matrix} \sigma'_x \\ \sigma'_y \\ \tau'_{xy} \\ \tau'_{xz} \\ \tau'_{yz} \end{matrix} = \begin{pmatrix} D_f & 0 \\ 0 & D_c \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \varepsilon_f \\ \varepsilon_c \end{pmatrix} = \frac{E}{1-\nu^2} \cdot \begin{pmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{pmatrix} \begin{matrix} 0 & 0 & \varepsilon'_x \\ 0 & 0 & \varepsilon'_y \\ 0 & 0 & \gamma'_{xy} \\ \alpha G & 0 & \gamma'_{xz} \\ 0 & \alpha G & \gamma'_{yz} \end{matrix}$$

Finalment, es poden trobar els esforços, integrant les tensions sobre el espessor de la lamina, tal i com es mostra seguidament:

$$\hat{\sigma} = \begin{pmatrix} \hat{\sigma}_m \\ \hat{\sigma}_f \\ \hat{\sigma}_c \end{pmatrix} = \begin{matrix} N'_x \\ N'_y \\ N'_{xy} \\ \ddot{M}'_x \\ M'_y \\ M'_{xy} \\ \ddot{Q}'_x \\ Q'_y \end{matrix} \int_{-\frac{t}{2}}^{\frac{t}{2}} \begin{pmatrix} \sigma'_{m+f} \\ z' \cdot \sigma'_{m+f} \\ \sigma'_c \end{pmatrix} dz' = \int_{-\frac{t}{2}}^{\frac{t}{2}} \begin{matrix} z' \cdot \sigma'_x \\ z' \cdot \sigma'_y \\ z' \cdot \tau'_{xy} \\ z' \cdot \sigma'_x \\ z' \cdot \sigma'_y \\ z' \cdot \tau'_{xy} \\ \tau'_{xz} \\ \tau'_{yz} \end{matrix} dz' = \begin{matrix} t \cdot D'_f \cdot \begin{pmatrix} \varepsilon'_x \\ \varepsilon'_y \\ \gamma'_{xy} \end{pmatrix} \\ \dots \\ \frac{t^3}{12} \cdot D'_f \cdot \begin{pmatrix} \varepsilon'_x \\ \varepsilon'_y \\ \gamma'_{xy} \end{pmatrix} \\ \dots \\ t \cdot D'_c \cdot \begin{pmatrix} \tau'_{xz} \\ \tau'_{yz} \end{pmatrix} \end{matrix}$$

Un cop definits el camp de deformacions, el vector de tensions i el d'esforços en el sistema de referència local, es poden trobar les expressions de les matrius de rigidesa (K), els vectors de forces nodals d'equilibri (q) i els vectors de forces nodals equivalents (f) per cadascun dels elements a partir del teorema de treballs virtuals (PTV)

L'expressió inicial del teorema de treballs virtuals és la següent:

$$\begin{matrix} (1) \\ (2) \end{matrix}$$

$$\iiint_V \delta \cdot \varepsilon'^T \cdot \sigma' \cdot dV = \iint_A \delta \cdot u'^T \cdot t' \cdot dA + [\delta \cdot a'^{(e)}]^T \cdot q'^{(e)}$$

on:

$t' = [t'_x, t'_y, t'_z, m'_x, m'_y]^T$ son les forces repartides segons la direcció local x', y', z' i els moments repartits continguts en els plans $x'z'$ i $y'z'$ respectivament.

$q'^{(e)} = [R'_{xi}, R'_{yi}, R'_{zi}, M'_{xi}, M'_{yi}]^T$ son les forces puntuals que actuen al node i del element segons les direccions x', y', z' i els moments nodals continguts als plans $x'z'$ i $y'z'$ respectivament.

Imposant el camp de desplaçaments descrit anteriorment obtenim la següent expressió de la part (1) del PTV:

$$\begin{aligned} \iiint_V \delta \cdot \varepsilon'^T \cdot \sigma' \cdot dV &= \iiint_V \delta \cdot \left(\left(\varepsilon'_m \right) + \left(\varepsilon'_f \right) \right)^T \cdot \left(\begin{matrix} \sigma'_{m+f} \\ \sigma'_c \end{matrix} \right) \cdot dV = \\ &= \iiint_V \delta \cdot (\varepsilon'_m{}^T \cdot \sigma'_{m+f} + \varepsilon'_f{}^T \cdot \sigma'_{m+f} + \varepsilon'_c{}^T \cdot \sigma'_c) dV = \\ \iint_A \delta \cdot \left(\left(\varepsilon'^T_m \cdot \int_A \sigma'_m dz' \right) + \left(\varepsilon'^T_f \cdot \int_A z \cdot \sigma'_f dz' \right) + \left(\varepsilon'^T_c \cdot \int_A \sigma'_c dz' \right) \right) \cdot dA &= \\ \iint_A \delta \cdot (\varepsilon'^T_m \cdot \hat{\sigma}'_m + \varepsilon'^T_f \cdot \hat{\sigma}'_f + \varepsilon'^T_c \cdot \hat{\sigma}'_c) dA &= \iint_A \delta \cdot (\varepsilon'^T \cdot \hat{\sigma}') dA \end{aligned}$$

Finalment, discretitzant la matriu de deformacions i de tensions com $\varepsilon = B' \cdot a'^{(e)}$, on B' es la matriu de deformació del element i $\sigma = D' \cdot \varepsilon = D' \cdot B' \cdot a'^{(e)}$, obtenim:

(1)

$$\iint_A \delta \cdot (\varepsilon'^T \cdot \hat{\sigma}') dA = \iint_A [\delta \cdot a'^{(e)}]^T \cdot (B'_m{}^T \cdot D'_m \cdot B_m + B'_f{}^T \cdot D'_f \cdot B_f + B'_c{}^T \cdot D'_c \cdot B_c) \cdot a'^{(e)} \cdot dA$$

Si discretitzem la segona part del teorema del PTV (2) amb $u = N' \cdot a'^{(e)}$:

(2)

$$\iint_A \delta \cdot u'^T \cdot t' \cdot dA + [\delta \cdot a'^{(e)}]^T \cdot q'^{(e)} = \iint_A [\delta \cdot a'^{(e)}]^T \cdot N'^T \cdot t' \cdot dA + [\delta \cdot a'^{(e)}]^T \cdot q'^{(e)}$$

Igualant (1) amb (2) els termes $[\delta \cdot a'^{(e)}]^T$ es cancel·len i s'obté una expressió amb la forma Ka
 $f = q$.

$$\iint_A (B'_m{}^T \cdot D'_m \cdot B_m + B'_f{}^T \cdot D'_f \cdot B_f + B'_c{}^T \cdot D'_c \cdot B_c) \cdot a'^{(e)} \cdot dA = \iint_A N'^T \cdot t' \cdot dA + q'^{(e)}$$

On $K = K_m + K_f + K_c = \iint_A B'_m{}^T \cdot D'_m \cdot B_m \cdot dA + \iint_A B'_f{}^T \cdot D'_f \cdot B_f \cdot dA + \iint_A B'_c{}^T \cdot D'_c \cdot B_c \cdot dA$ es la matriu de rigidesa de la membrana, flexió i tallant.

On $f = \iint_A N'^T \cdot t' \cdot dA$ és el vector de forces nodals equivalents i $q = q'^{(e)}$ és el vector de forces puntuals del element.

Un cop calculat K, f y q de tots els elements, aquests necessiten ser transformats a coordenades globals per poder ser assemblats. Aquesta transformació és la següent:

Matriz de transformacion de movimientos y fuerzas nodales de locales a globales:

$$L = \begin{pmatrix} \lambda_{x'ix} & \lambda_{x'iy} & \lambda_{x'iz} & & & \\ \lambda_{y'ix} & \lambda_{y'iy} & \lambda_{y'iz} & & & \\ \lambda_{z'ix} & \lambda_{z'iy} & \lambda_{z'iz} & & & \\ & & & \lambda_{y'ix} & \lambda_{y'iy} & \lambda_{y'iz} \\ & & & \lambda_{x'ix} & \lambda_{x'iy} & \lambda_{x'iz} \end{pmatrix} ; T = \begin{pmatrix} L^{(e)} & & & & & \\ & & & & & \\ & & & & & \\ & & & & & \\ & & & & & \\ & & & & & L^{(e)} \end{pmatrix}$$

$$K^{(e)} = [T^e]^T \cdot K'^{(e)} \cdot [T^e] \quad ; \quad f^{(e)} = [T^e]^T \cdot f'^{(e)} \quad ; \quad q^{(e)} = [T^e]^T \cdot q'^{(e)}$$

Finalment sol queda fer la integració reduïda per Gauss Legendre i assemblar les matrius.

Resultats del anàlisi:

Primer de tot es requereix fer un estudi de convergència dels resultats obtinguts mitjançant diferents malles de diferents tipologies i mides d'elements per tal de verificar la bondat de la solució.

S'ha decidit fer el anàlisi de convergència per els desplaçaments verticals (direcció y) de l'estructura sota carrega pròpia i no la convergència dels esforços, degut a que d'aquesta manera no correm el risc d'escollir un punt de concentració de tensions on els resultats no serien representatius.

Així mateix, les tipologies d'elements que s'han utilitzat han sigut el quadrilàter i triangles normals i quadràtics. Els càlculs s'han repetit per diferents mides de malla tal i com es pot observar a la següent taula.

Tipus d'element	Mida de la malla	Número d'elements	Número de nodes	Número de Graus de Llibertat	Fletxa màxima (m)
Triangular normal	10	310	148	296	-0,00694
	5	466	208	416	-0,009905
	1	3198	1497	2994	-0,013739
	0,5	14210	6904	13808	-0,01419
	0,25	57352	28277	56554	-0,014355
Triangular quadràtic	10	310	609	1218	-0,01427
	5	466	885	1770	-0,014281
	1	3198	6195	12390	-0,014328
	0,5	14210	28021	56042	-0,014413
	0,25	57352	113909	227818	-0,014456
Rectangular normal	10	205	198	396	-0,0099
	5	297	272	544	-0,0124
	1	1620	1518	3036	-0,01412
	0,5	6604	6403	12806	-0,014331
	0,25	26730	26331	52662	-0,014415
Rectangular quadràtic	10	205	604	1208	-0,013279
	5	297	844	1688	-0,014179
	1	1620	4659	9318	-0,014328
	0,5	6604	19413	38826	-0,014418
	0,25	26730	79395	158790	-0,014462
Rectangular quadràtic 9	10	205	809	1618	-0,013953
	5	297	1141	2282	-0,014217
	1	1620	6279	12558	-0,014361
	0,5	6604	26017	52034	-0,01442
	0,25	26730	106125	212250	-0,014477

Figura 7. Resultats de la fletxa màxima obtinguda en funció del tipus d'element i mida de la malla.

Aquests resultats han sigut representats mitjançant un gràfic de línies (Figura 8) per poder interpretar ràpidament a partir de quin número de nodes cada tipologia de malla comença a convergir. Es pot observar, que per elements quadrilàters i triangulars normals requereixen de major nombre de nodes per a que la solució convergeixi. Per altre costat, amb elements de tipus quadrat quadràtic i triangular quadràtics i quadràtic 9, s'aconsegueix una convergència molt més ràpida. El tipus d'element que més ràpidament convergeix és el triangular quadràtic i per aquest motiu serà el utilitzat per fer els propers càlculs de les tensions de Von Mises per diversos valors de la carrega repartida. El número de nodes que s'utilitzarà serà de 9.318 (mida del element = 1) per acabar d'assegurar la seva convergència i obtenir temps de càlcul raonables.

Fletxa màxima deguda a pes propi

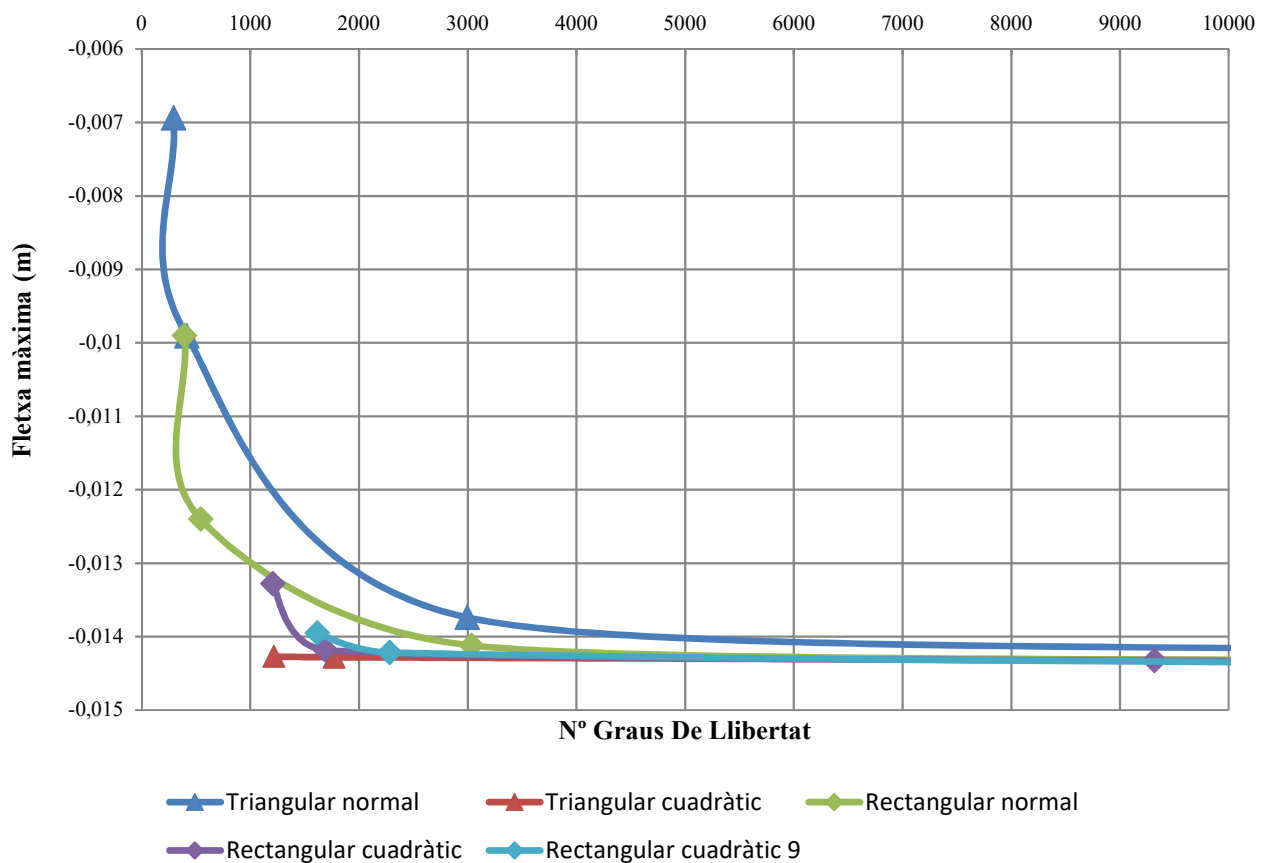


Figura 8. Anàlisi de convergència de la solució amb carrega de pes propi.

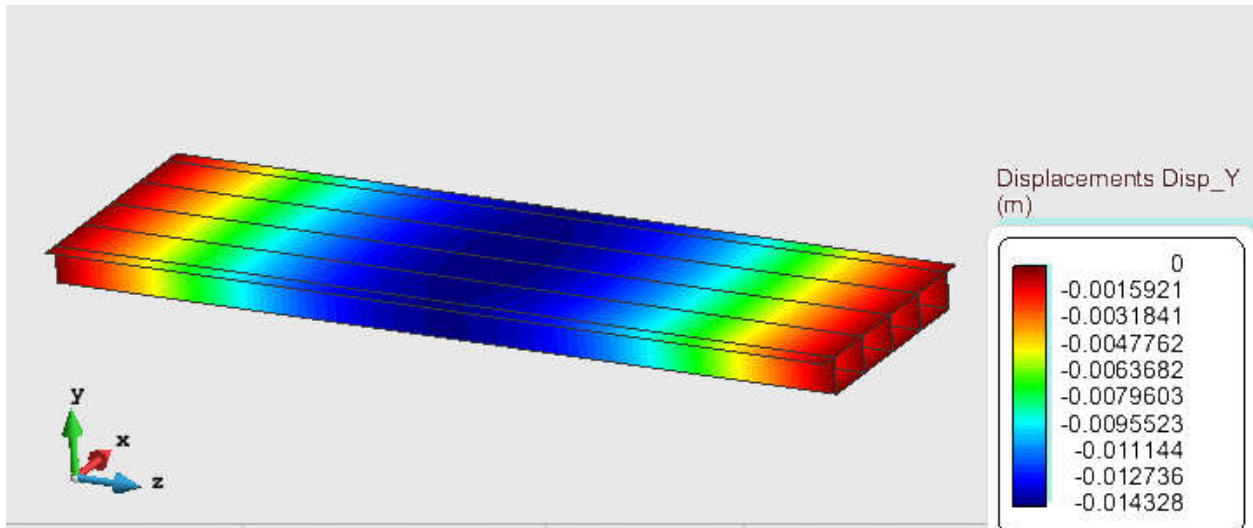


Figura 9. Resultat del desplaçament vertical amb una malla triangular quadràtica de 9318 nodes

Un cop definida la malla a utilitzar per els propers càlculs, malla de mida 1 i elements de tipus triangular quadràtics, seguidament s'efectuarà el càlcul de les tensions de Von Mises màximes en funció de la carrega repartida aplicada a la superfície del pont.

Les carregues escollides han sigut múltiples del pes uniforme que s'ha de suposar en un pont degut a camions. Es a dir, aquesta carrega seria deguda a la acumulació de 19-20 camions acumulats en un mateix punt. El valor de referència de 8,825 KN/(m²·camió) s'han obtingut de la norma IAP11. Multiplicant els 900kg/m²·9,81m/s² per obtenir els newtons resultants.

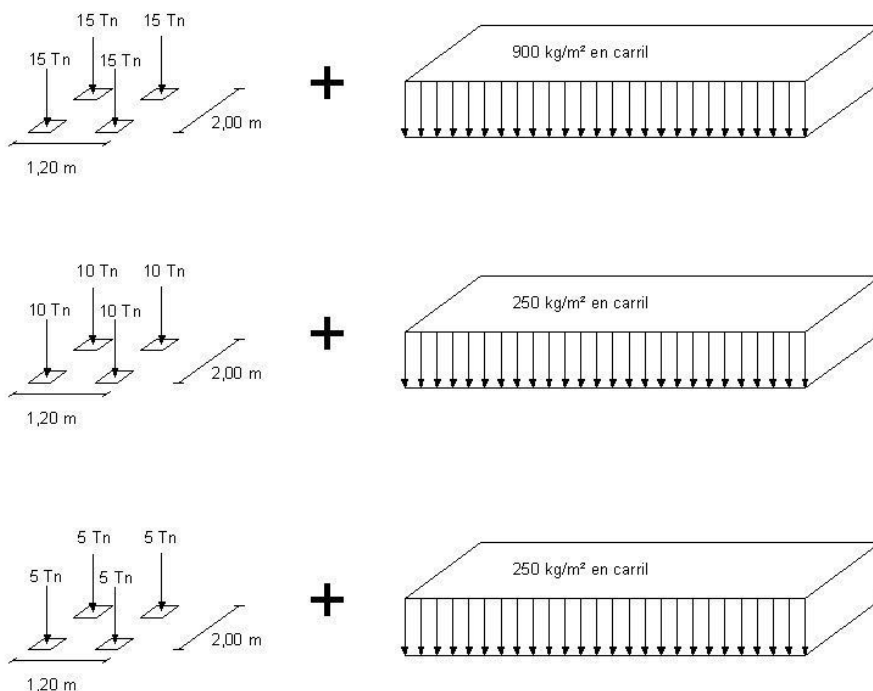


Figura 10. Carrega distribuïda equivalent del pes d'un camió segons la IAP11 [2]

Els valors obtinguts de Von Mises a la part superior (Top) i inferior (Bottom) de les lamines poden veure's representats a la Taula 2 i a la Figura 11.

# Camions	q KN/m ²	Top + (Mpa)	Top - (Mpa)	Bottom + (Mpa)	Bottom - (Mpa)
0	0	68,19	-8,19	68,00	-8,17
1	8,825	44,60	-5,22	44,62	-5,22
10	88,25	171,00	-20,90	171,10	-20,60
18	158,85	360,04	-43,49	359,59	-43,89
19	167,675	383,62	-46,29	383,15	-46,79
19,5	172,0875	395,41	-47,69	394,93	-48,24
19,75	174,29375	401,31	-48,39	400,82	-48,97
20	176,5	407,21	-49,09	406,00	-49,69

Taula 2. Relació carrega repartida uniforme i tensió de Von Misses

En aquesta taula i en el gràfic que ve a continuació, es pot observar que la tensió a partir de la que es superen els 400 Mpa a les tensions de Von Misses és troba entre 172,08 KN/m² i 174,29 KN/m² i ve limitada per la cara superior de la lamina.

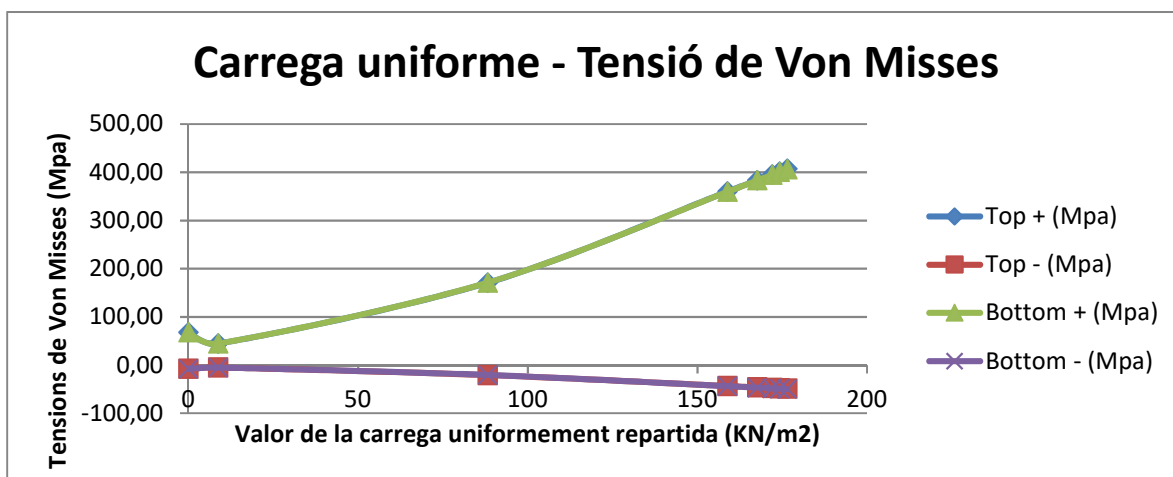


Figura 11. Representació gràfica entre la carrega repartida uniforme i tensió de Von Misses

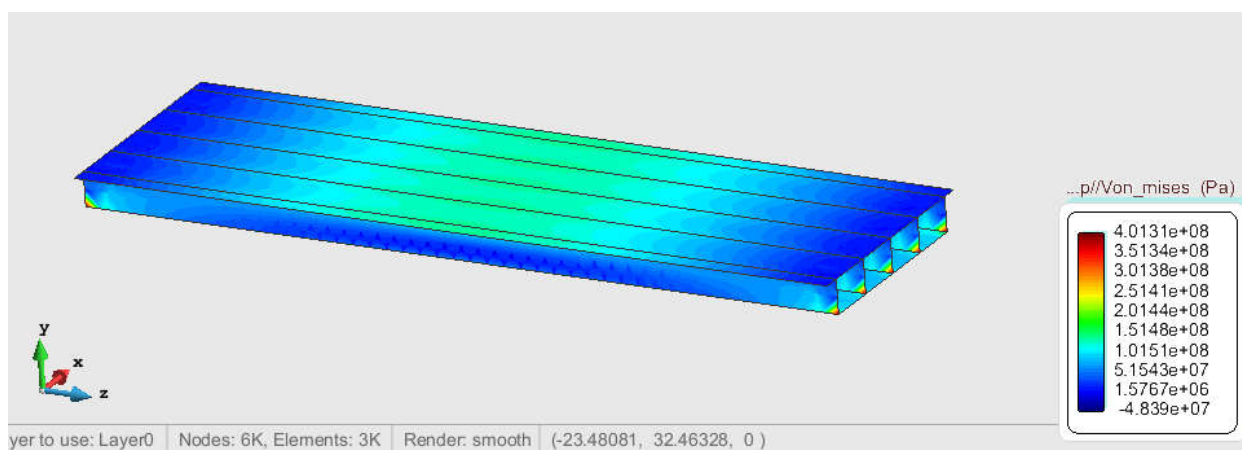


Figura 12. Tensions de Von Misses (TOP) per el valor de carrega repartida $q=174,29$ KN/m²

A la Figura 12, observem acumulació de tensions:

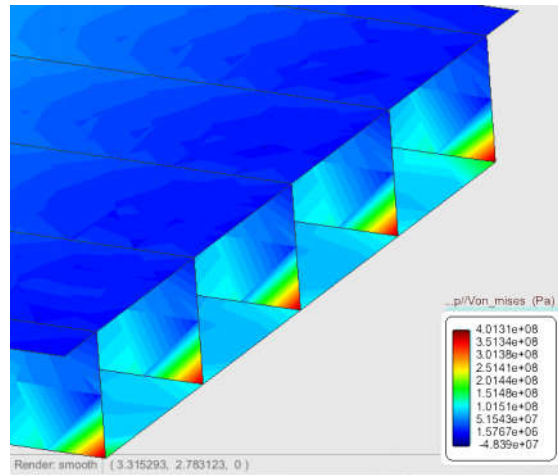


Figura 13. Concentració de tensions

No obstant, hem refinat la malla en els punts de major esforços de la cara superior de la lamina, observem que no es un punt de concentració de tensions.

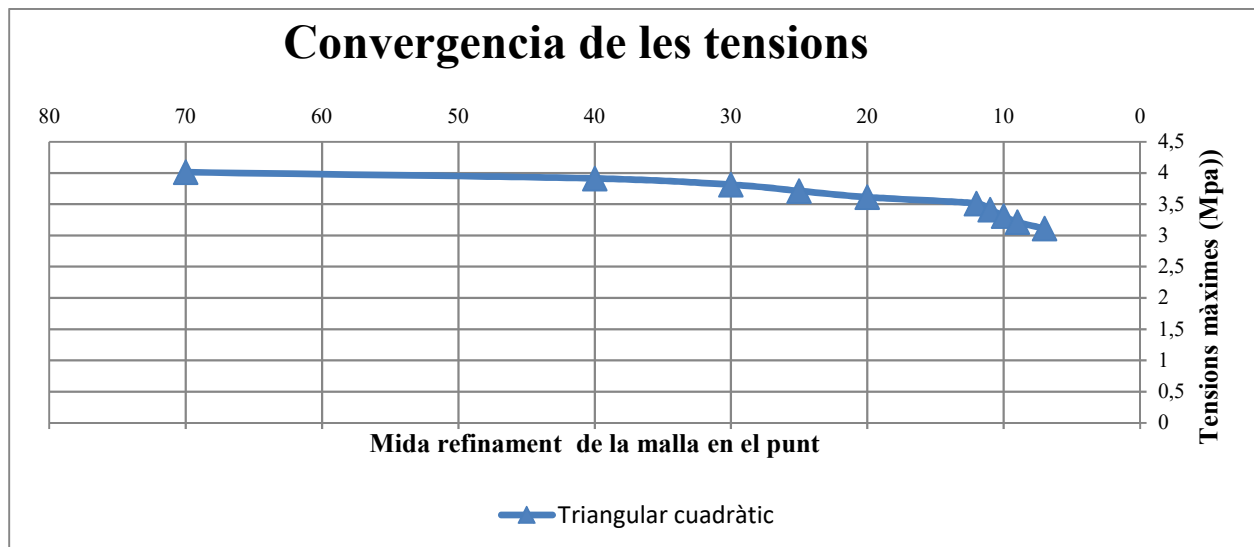


Figura 14. Convergència de les tensions.

2. Resolució problema de la presa de formigó de 80 metres d'altura (S-24)

L'objectiu d'aquest problema es determinar si en una presa de terres de 80 metres d'altura, es produeixen tensions de tracció que excedeixen els 0.01 Mpa.

Geometria:

Aquest problema consta de dos elements, per un costat tenim una presa de formigó i per l'altre el terreny on aquesta ha d'anar situada. La geometria de la presa es variable dintre d'uns límits (Figura 15). La geometria escollida per modelitzar el problema ha estat la que suposa un menor cost (menor volum de formigó) i que suposa el cas més desfavorable per una presa de gravetat (menys pes). Així doncs, es comprovarà si per aquesta geometria les tensions de tracció son acceptables.

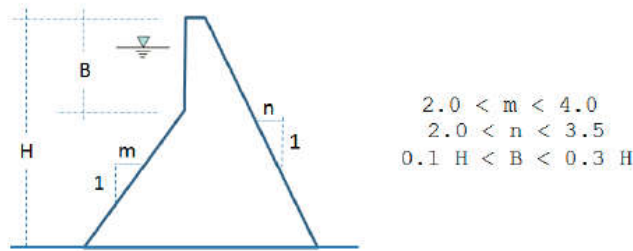


Figura 15. Geometria del problema (Enunciat)

Per tal de construir la presa que requereix un volum de formigó mínim, les dues pendents de la presa seran (2H:1V), on n i m prenen valor 2 (Figura 16).

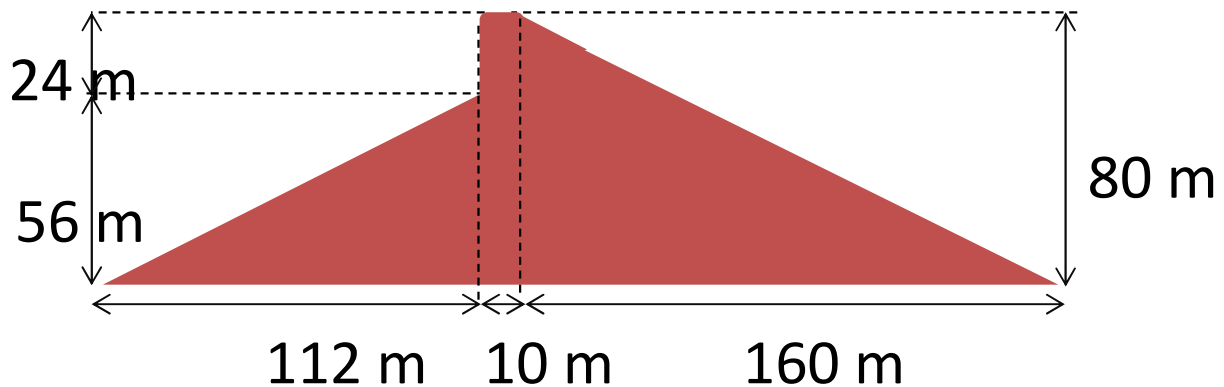


Figura 16. Figura de la secció de la presa amb material mínim

Per un altre costat trobem el terreny on ha d'anar situada la presa, aquest té un gruix de 30 metres i desenvolupament de 200 metres. El perfil del terreny es pot observar a la (Figura 17) i s'ha considerat una extensió de 682 metres. Aquesta longitud permet disposar de 200 metres d'esplanada a cada banda de la presa.

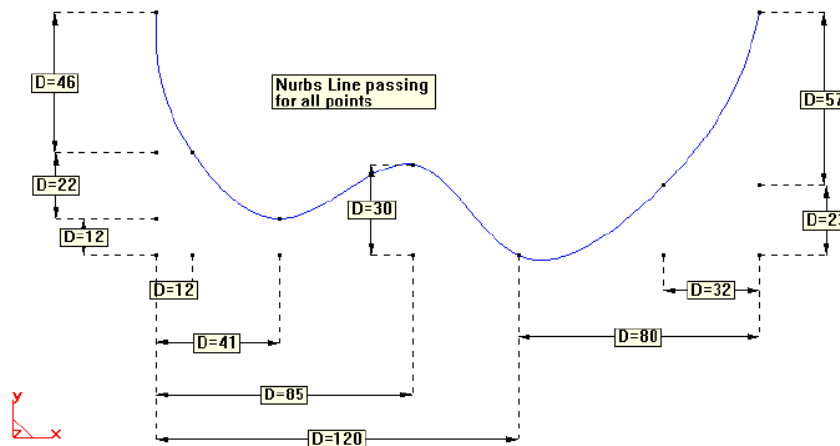


Figura 17. Perfil de la presa

Materials:

Els valors del mòdul de Young (E), coeficient de Poisson (ν) i pes específic (γ) que caracteritzen els materials de la presa de formigó i el terreny venen donats per l'enunciat i es poden veure resumits a la següent taula:

Formigó	Terreny
---------	---------

E	$22 \frac{GN}{m^2}$	$37 \frac{GN}{m^2}$
ν	0.2	0.3
γ	$25000 \frac{N}{m^3}$	$20000 \frac{N}{m^3}$

Taula 3. Paràmetres del terreny i la presa

Condicions de contorn i carregues:

Es considerarà que la presa es troba encastada al terreny i el terreny te bloquejat el moviment horitzontal a les seves superfícies verticals. Tant mateix, el moviment horitzontal i vertical de la base del terreny també seran impeditos. A més, tant la presa com el terreny es troben sotmesos al pes propi opció que s'activa en el Gid en la direcció corresponent.

Es considerarà dos fases:

1. Pes propi
2. Pes propi i carrega hidrostàtica provocada per aigua retinguda per la presa amb una altura de 77 metres per damunt de la seva base.

La presència d'aquesta aigua provocarà un seguit de carregues repartides com veurem a continuació.

Nota: El problema es resoldrà primer en 2 dimensions i posteriorment en 3 dimensions.

Pre-procés 2D:

El problema de la presa sobre el terreny en 2 dimensions es resoldrà com un problema de deformació plana.

Primer de tot digitalitzem mitjançant el programa **GID** la presa i el terreny mitjançant punts, línies i superfícies (Figura 18). S'ha considerat deixar a banda i banda de la presa una extensió de terreny de 200 metres de longitud per tal de garantir que les tensions i desplaçaments s'estabilitzen en el terreny. Pel que a la presa respecta, s'ha situat centrada just al damunt del terreny amb la geometria definida a la (Figura 16).

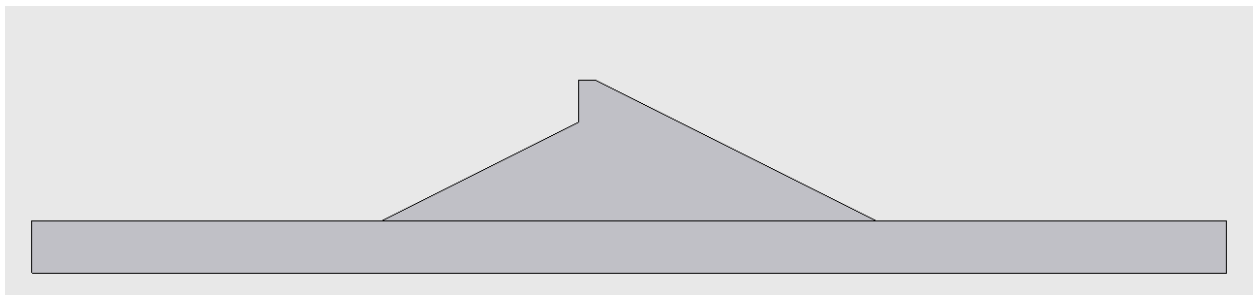


Figura 18. Geometria del problema al Ramseries (2D).

Seguidament, es defineix les diferents superfícies i s'assigna a cadascuna de elles els materials definits a la Taula 3 (Figura 19).

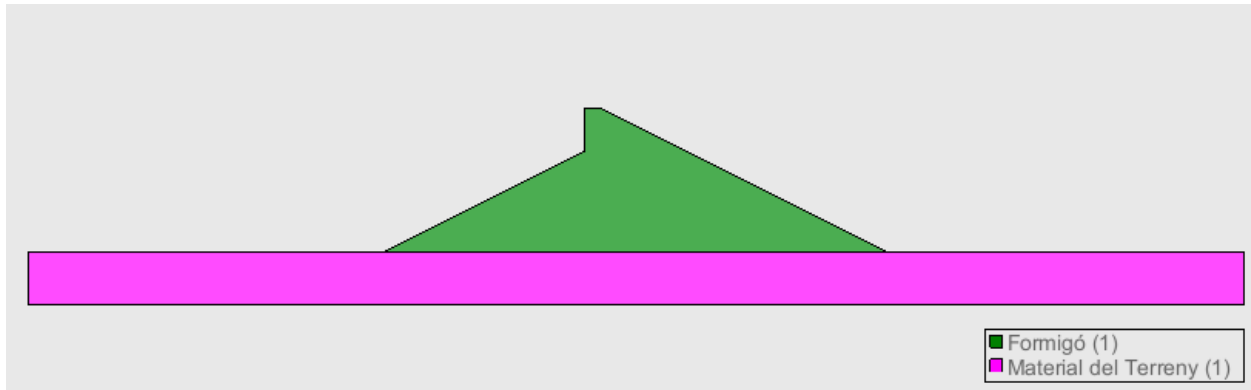


Figura 19. Definició dels materials de la presa i el terreny

Així mateix, també es defineix les condicions de contorn (Figura 20) que tenen bloquejat el moviment del terreny en les rectes verticals, els moviment horitzontal i vertical a la base (línia horitzontal inferior) del terreny. Tant mateix, també s'apliquen les carregues de pes propi i carrega uniformement repartida deguda a la pressió hidrostàtica (Figura 21).

Per la carrega hidrostàtica s'ha suposat les següents consideracions:

$$g \approx 9,81 \frac{m}{s^2} \text{ i } \gamma_w = 1 \frac{Kg}{dm^3}$$

Pressió d'aigua:

$$p_w = \frac{1 \text{ kg}}{dm^3} \cdot \frac{10^3 dm^3}{m^3} \cdot 9,81 \frac{m}{s^2} = 9810 \frac{N}{m^2} = 9810 \cdot \frac{N}{m}$$

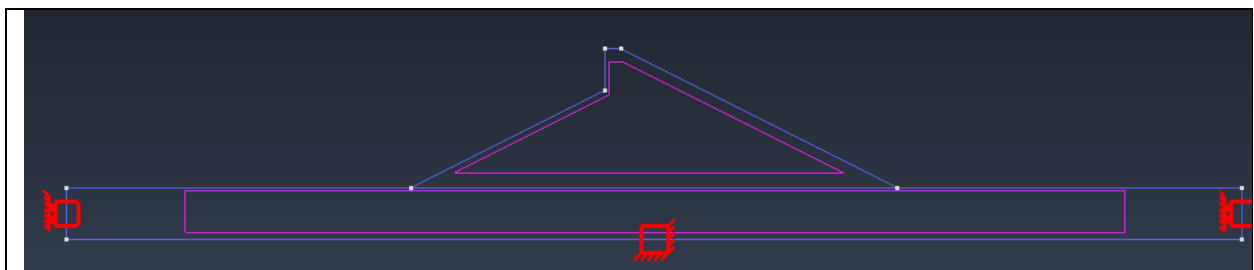
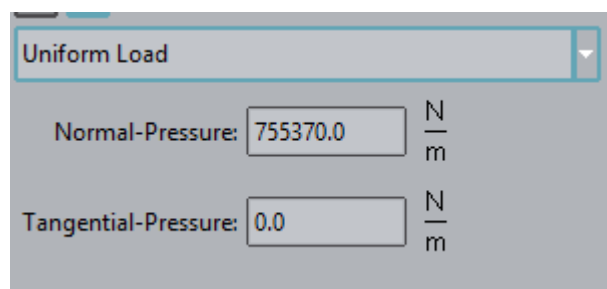


Figura 20. Condió de contorn del terreny i la presa.

Carrega uniforme sobre el terreny horitzontal (1)

$$P_n = 77m \cdot 9810 \frac{N}{m^2}$$



Carrega linial sobre el pla inclinat (2)

$$P_{ini} = 77m \quad 9810 \frac{N}{m^2}$$

$$P_{fin} = (77 \quad 56)m \quad 9810 \frac{N}{m^2}$$

Linear Load

X initial: m

Y initial: m

X final: m

Y final: m

Initial Normal Pressure: $\frac{N}{m}$

Final Normal Pressure: $\frac{N}{m}$

Carrega linial sobre la paret vertical de la presa (3)

$$P_{ini} = (77 \quad 56)m \quad 9810 \frac{N}{m^2}$$

$$P_{fin} = (77 \quad 56)m \quad 9810 \frac{N}{m^2}$$

Linear Load

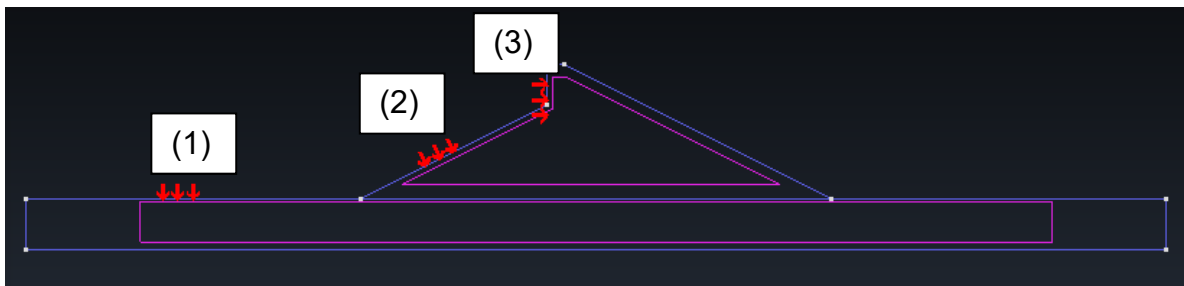
X initial: m

Y initial: m

X final: m

Y final: m

Initial Normal Pressure: $\frac{N}{m}$



+

Pes propi

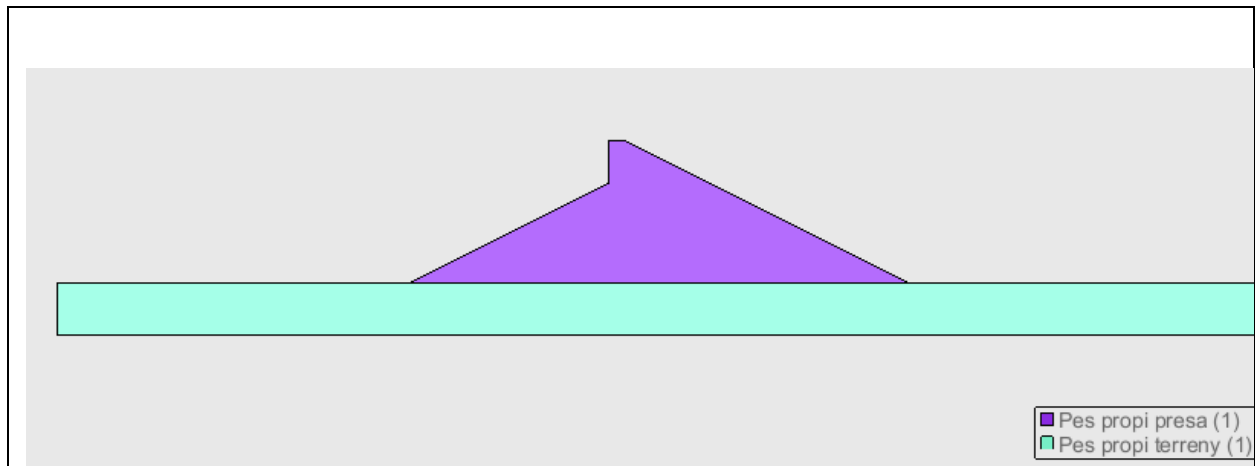


Figura 21. Carrega hidrostàtica i pes propi

Un cop aplicades les condicions de contorn, carregues, materials i elaborada la geometria, finalment es discretitza el model mitjançant malles diferents que s'aniran modificant fins garantir la convergència de la solució (**Error! Reference source not found.**).

Un cop la solució convergeixi, s'analitzarà les tensions de tracció tant amb la presa plena (sota carrega de pes propi i pressions hidrostàtiques) com amb la presa buida (sota carrega de pes propi i sense pressions hidrostàtiques) per avaluar si superen el valor límit de 0.01 Mpa.

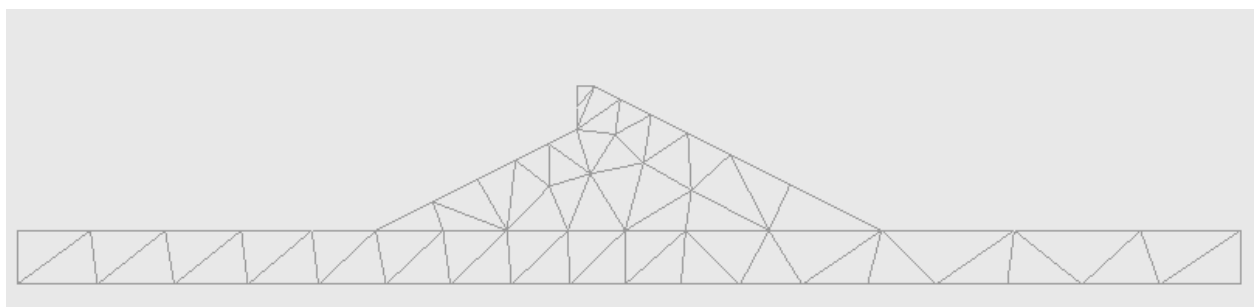


Figura 22. Malla de formada d'elements tetraèdrics de 3 nodes

Càlculs i teoria darrera el càlculs del programa d'elements finits:

Deformació plana:

Un cop demanem al programa d'elements finits que efectui els càlculs (Ramseries), el programa detecta que es tracta d'un problema de deformació plana i comença a calcular i assemblar totes les matrius de rigidesa, vector de forces nodals equivalents, vector de forces puntuals, per acabar resolent el problema i obtenir el valor de les seves tensions, deformacions i desplaçaments.

Post-Procés 2D:

Primer de tot es requereix fer un estudi de convergència dels resultats obtinguts mitjançant diferents malles de diferents tipologies i mides d'elements per tal de verificar la bondat de la solució.

S'ha decidit fer el anàlisi de convergència per els desplaçaments verticals màxims de la presa (direcció y), els quals es donen just a la cresta, per el cas de carrega pròpia. S'ha escollit fer la convergència de desplaçaments i no d'esforços, degut a que d'aquesta manera no correm el risc d'escollir un punt de concentració de tensions on els resultats no serien representatius.

Així mateix, les tipologies d'elements que s'han utilitzat han sigut els triangles normals, triangles quadràtics i quadrilàters tant normals com quadràtics. Els càlculs s'han repetit per diferents mides de malla tal i com es pot observar a la següent taula.

Tipus d'element	Mida de la malla	Número d'elements	Número de nodes	Número de Graus de Llibertat	Fletxa màxima (m)
Triangular normal	20	196	153	306	-0,0038735
	10	636	393	786	-0,0040088
	5	2786	1542	3084	-0,0040714
	4	4185	2279	4558	-0,0040834
	3	7606	4051	8102	-0,0040928
	2	17358	9050	18100	-0,0041089
Triangular quadràtic	40	67	193	386	-0,0040865
	30	82	238	476	-0,004084
	20	196	471	942	-0,0040887
	10	636	1421	2842	-0,0041066
	5	2786	5869	11738	-0,0041171
Quadrilàter normal	20	73	113	226	-0,0039113
	10	286	361	722	-0,0040429
	5	1251	1400	2800	-0,0040962
	4	1949	2136	4272	-0,0041023
	3	3610	3859	7718	-0,0041088
	2	8339	8710	17420	-0,0041173
Quadrilàter quadràtic	40	40	165	330	-0,0040701
	20	73	327	654	-0,0040612
	10	286	1007	2014	-0,0040883
	8	498	1681	3362	-0,0041022
	6	847	2790	5580	-0,0041164
	4	1949	6220	12440	-0,0041179

Figura 23. Resultats de la fletxa màxima obtinguda en funció del tipus d'element i mida de la malla.

Aquests resultats han sigut representats mitjançant un gràfic (Figura 24) per poder interpretar ràpidament a partir de quin número de nodes cada tipologia de malla comença a convergir. Es pot observar, que per elements triangulars normals, triangulars quadràtics, quadrilàters normals i quadrilàters quadràtics es requereixen (més de 9050), (1421), (8710), (6220) nodes respectivament per que la solució convergeixi.

El tipus d'element que més ràpidament convergeix és el triangular quadràtic i per aquest motiu serà el utilitzat per fer els propers càlculs de les tensions de tracció de les dos fases a considerar. El número de nodes que s'utilitzarà serà de 1421 (mida del element = 10) per acabar d'assegurar la seva convergència i obtenir temps de càlcul raonables.

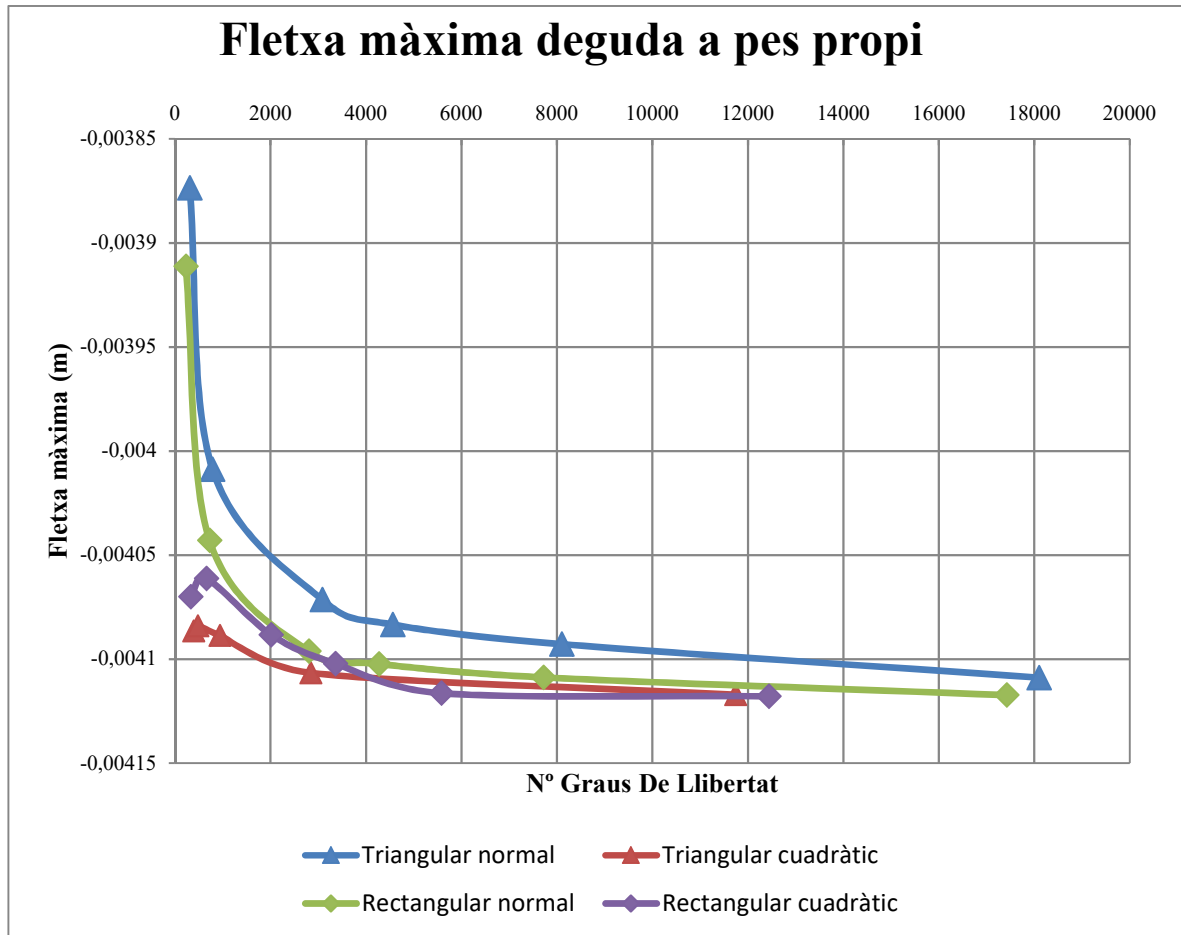


Figura 24. Anàlisi de convergència de la solució amb carrega de pes propi.

Un cop definida la malla a utilitzar per els propers càlculs, es calculen els desplaçaments i tensions dels dos elements.

Seguidament s'analitzarà i es farà la comparació dels desplaçaments (en direcció x i y) per el cas de carrega sota (pes propi) i per el cas de carrega (pes propi + pes de l'aigua).

Desplaçament horitzontal (Fase 1 - Pes propi):

Podem observar, que els desplaçaments horitzontals deguts a pes propi son pràcticament inexistent tant a la presa com al terreny (menors a 0,2 mm) i s'observa una certa simetria a les solucions ja que el problema no presenta simetria (de carrega i de forma) sota pes propi però gairebé.

El fet de que aquests desplaçaments horitzontals siguin tant petits ve donat en part degut que les carregues que estan actuen en aquesta fase 1 (pes propi) tenen totes direcció vertical descendent.

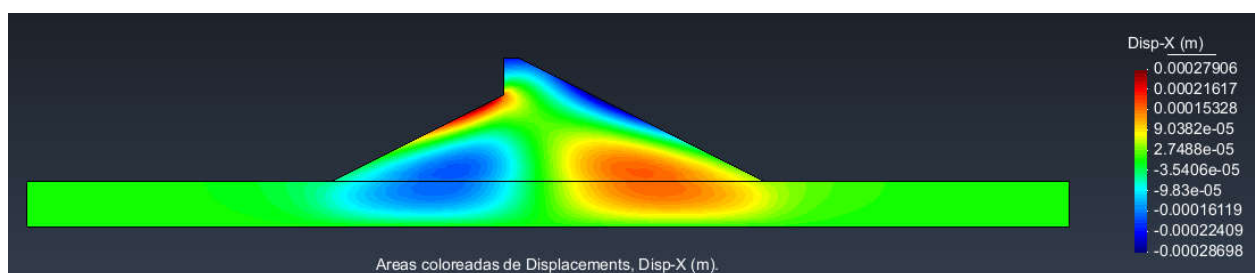


Figura 25. Desplaçaments X deguts a pes Propi (Fase 1).

Desplaçament horitzontal (Fase 2 - Pes propi i carrega hidrostàtica):

Per un altre costat, si observem el cas en el que s'aplica la carrega de pes propi i les carregues hidrostàtiques, a un costat de la presa, aquestes segones trenquen totalment amb la simetria de carregues i apareixen tensions horitzontals en el problema que fan que els desplaçaments horitzontals del problema s'incrementin lleugerament. Tot així, estem parlant de desplaçaments entre 2,6 cm i 5 mm.

Aquestes pressions horitzontals provoquen per un costat la comprensió del material situat a la dreta del pla inclinat de la presa (que és major a la base que al final d'aquest pla degut a la forma triangular de les carregues lineals aplicades), provoquen un gir del cim de la presa cap en direcció vers el aigua (també degut a la forma triangular de les carregues repartides) i finalment també provoquen un esforç vertical major a l'esquerra de la presa (degut a l'aigua que hi ha damunt del terreny) la qual provoca majors desplaçaments horitzontals del costat esquerra que al costat dret.

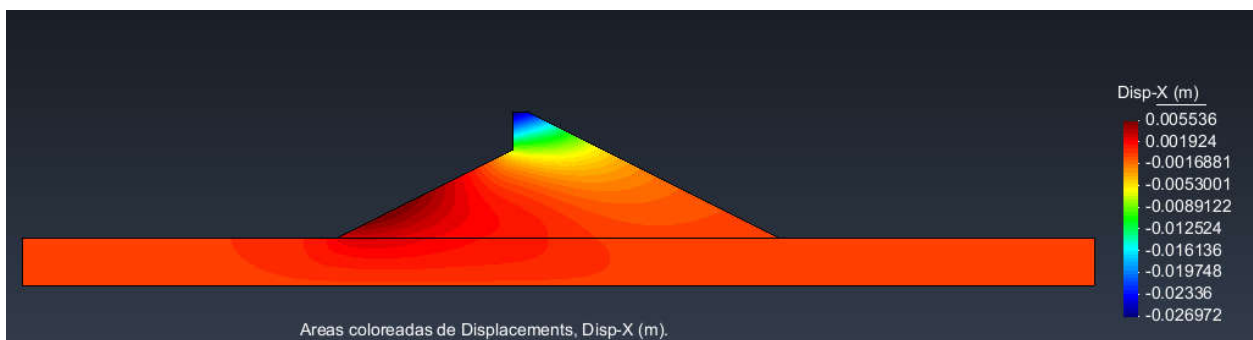


Figura 26.Desplaçaments X deguts a pes Propi i Carrega Hidrostàtica (Fase 2).

Sembla a ser que els resultats obtinguts pel desplaçament horitzontal son lògics i per aquest motiu es reforça la bondat del model.

Seguidament estudiarem el moviment vertical del model (presa-terreny) altre vegada considerant les dues fases.

Desplaçament vertical (Fase 1 - Pes propi):

Pel que al desplaçament vertical respecta, tornem a observar la simetria comentada en el desplaçament horitzontal (Fase 1) degut a la casi existència de simetria de carregues i forma. Observem que tal i com era d'esperar, el terreny i la presa, com més pes tenen sota més s'enfonsen. Així doncs, el punt d'assentament màxim apareix a la cresta de la presa, tal i com era d'esperar. Obtenint un valor d'assentament que convergeix als (4,1 mm).

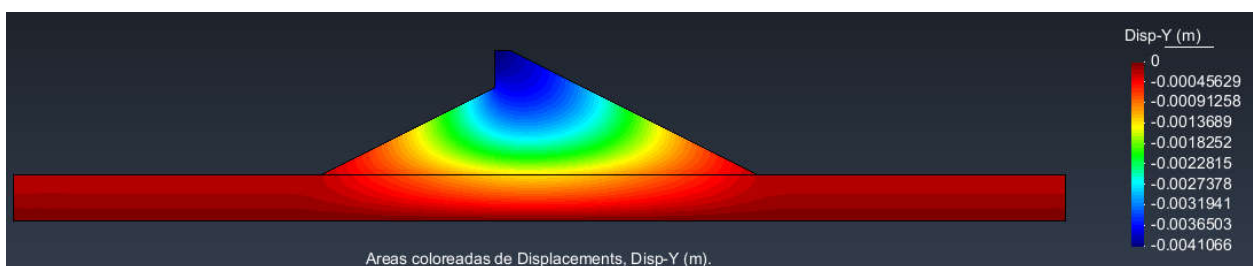


Figura 27.Desplaçaments Y deguts a pes Propi (Fase 1).

Desplaçament vertical (Fase 2 - Pes propi i carrega hidrostàtica):

Com no podia ser d'altra manera, al introduir la carrega de l'aigua, es trenca la simetria de carregues i per tant també la simetria del desplaçament vertical del problema.

Observem una major sol·licitació vertical descendent en els punts que tenen a sobre més aigua. Aquesta està fent pressió i provoca una comprensió que origina un major assentament al costat esquerre (costat del aigua) que el costat dret (costat sense aigua). El valor del assentament es veu incrementat respecte la fase anterior i també es troba situat a la cresta de la presa. El valor d'aquest assentament és de 16 mm.

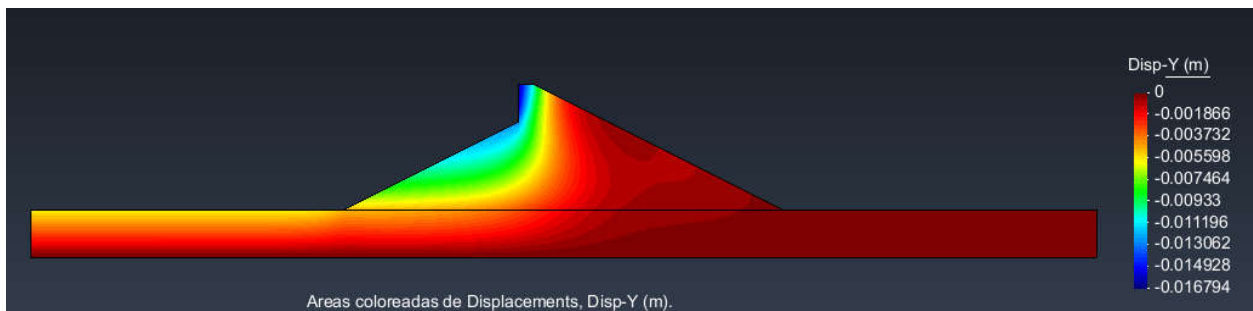


Figura 28. Desplaçaments Y deguts a pes Propi i Carrega Hidrostàtica (Fase 2).

Finalment farem el estudi de les tensions resultants.

Tensió de tracció (Fase 1 - Pes propi):

Sota la carrega del pes propi observem que el problema no té traccions excepte en un punt molt concentrat de la cresta de la presa i que poden ser concentracions de tensions. No obstant, com són tensions molt petites poden despreciar-se i podem garantir el requisit de que les tensions de tracció no excedeixen els 0.01 Mpa.

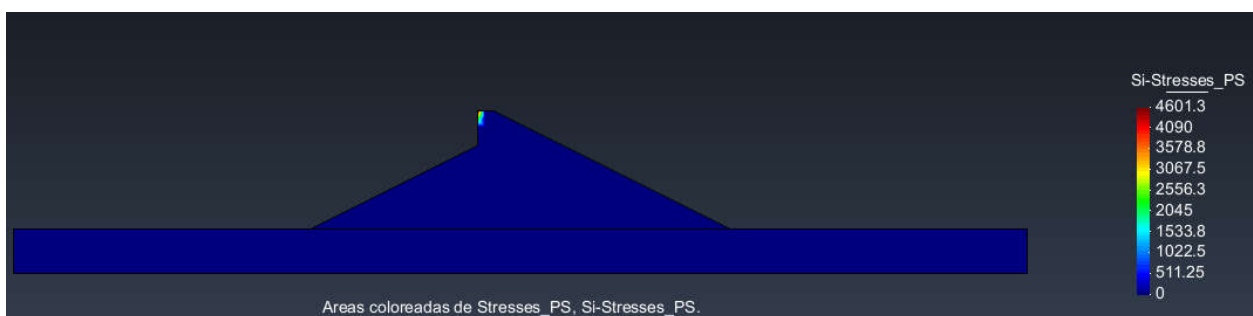


Figura 29. Traccions màximes degudes a pes Propi (Fase 1).

Tensió de tracció (Fase 2 - Pes propi i carrega hidrostàtica):

La rotació que es produeix a la cresta de la presa, provoca traccions elevades a la part dreta d'aquesta, sembla a ser que adquirint valors de 6.67 Mpa i excedint els límits que ens aviem proposat. Així doncs, sembla a ser que la cresta podria ser un punt de conflicte i que s'excedeix la tensió de tracció de 0.01 Mpa.

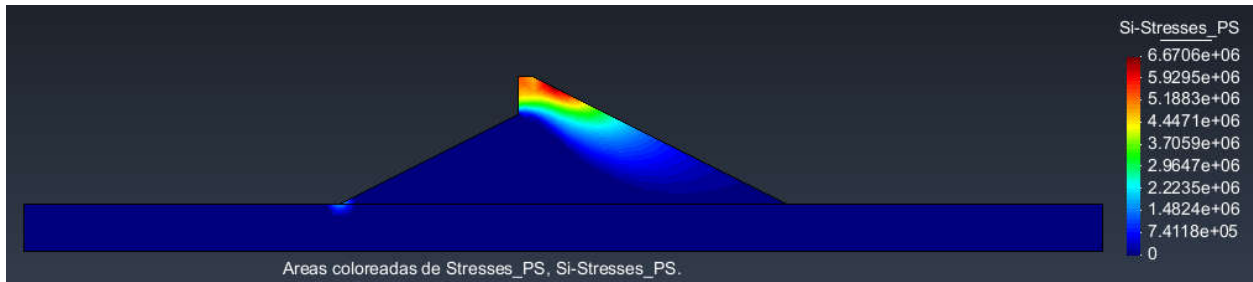


Figura 30. Traccions màximes degudes a pes Propi i Carregues Hidrostàtiques (Fase 2).

Els valors de tracció màxima obtinguts poden trobar-se a la següent taula:

	Valor traccions màximes (Mpa)
Carrega pròpia	0,0046 Mpa
Carrega pròpia + Carrega hidrostàtica	6,67 Mpa

La fase 1 satisfà els requisits de traccions inferiors a 0.01 Mpa, no obstant per la fase 2 això no és així. S'hauria de fer refinament de malla però es veurà al cas 3D.

Així doncs es pot concloure, que per la presa fabricada amb la menor quantitat de formigó, en les dos situacions de carrega estudiades les traccions màximes aparentment superen el líndar màxim imposat de 0.1 Mpa. Es comprovarà adientment al cas 3D amb el refinament de malla.

Pre-procés 3D:

El problema de la presa sobre el terreny en 3 dimensions es resoldrà com un problema de sòlids 3D. Primer de tot digitalitzem mitjançant el programa Ramseries la presa i el terreny mitjançant punts, línies i superfícies i volums. S'ha considerat deixar a banda i banda de la presa una extensió de terreny de 200 metres de longitud per tal de garantir que les tensions i desplaçaments s'estabilitzen en el terreny amb la seva profunditat de 30 metres. Pel que a la presa respecta, s'ha situat centrada just al damunt del terreny amb la geometria definida a la (Figura 16). Per la elaboració de la geometria final ha sigut necessari destinar gran quantitat de temps al correcte modelat de la infraestructura, realitzant una intersecció entre les superfícies del el terreny i la presa, eliminant aquelles línies, punts i superfícies que no eren finalment d'interès. Finalment, amb les superfícies resultants, s'han creat els volums dels sòlids (presa i terreny). El resultat final es pot observar a la (Figura 31).



Figura 31. Geometria del problema al Ramseries (3D).

Seguidament, es defineix les diferents superfícies i s'assigna a cadascun dels volums els materials definits a la Taula 3Taula 1 (Figura 32).

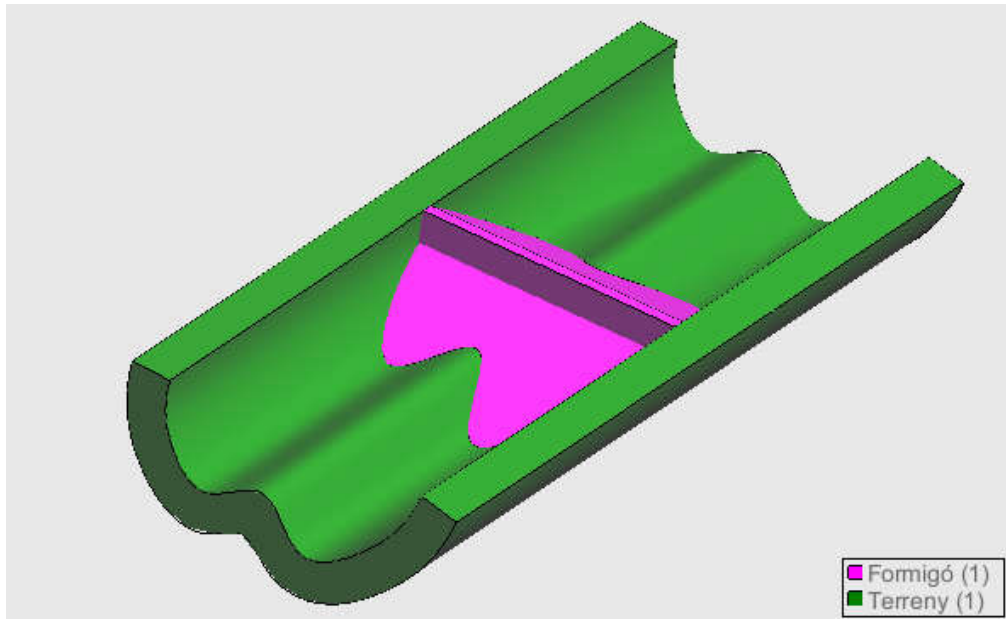


Figura 32. Definició dels materials de la presa i el terreny

Així mateix, també es defineix les condicions de contorn (Figura 33) que tenen bloquejat el moviment del terreny en les superfícies verticals, els moviment horitzontal i vertical a la base del terreny. Tant mateix, també s'apliquen les carregues de pes propi i carrega uniformement repartida deguda a la pressió hidrostàtica (Figura 34).

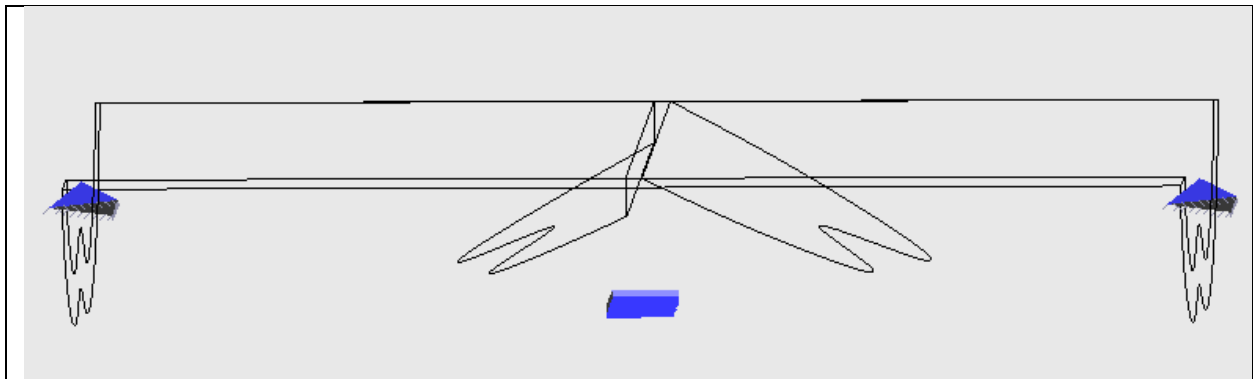


Figura 33. Condió de contorn del terreny i la presa.

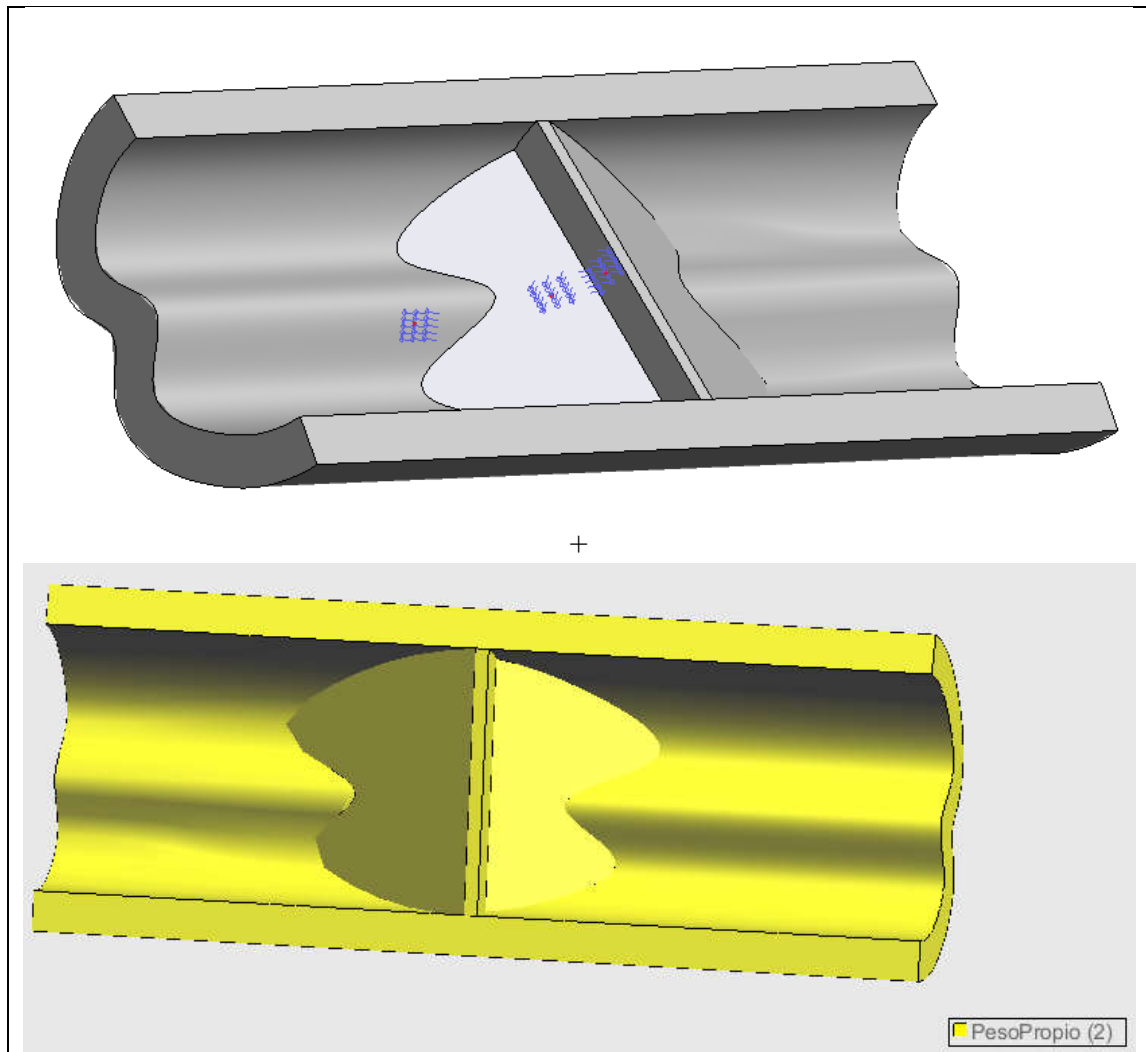


Figura 34. Carrega hidrostàtica i pes propi

Finalment, es discretitza el model mitjançant malles diferents que s'aniran modificant fins garantir la convergència de la solució (Figura 37Figura 6). Un cop la solució convergeixi, s'analitzarà les tensions de tracció tant amb la presa plena (sota carrega de pes propi i pressions hidrostàtiques) com amb la presa buida (sota carrega de pes propi i sense pressions hidrostàtiques) per avaluar si superen el valor límit de 0.01 Mpa.

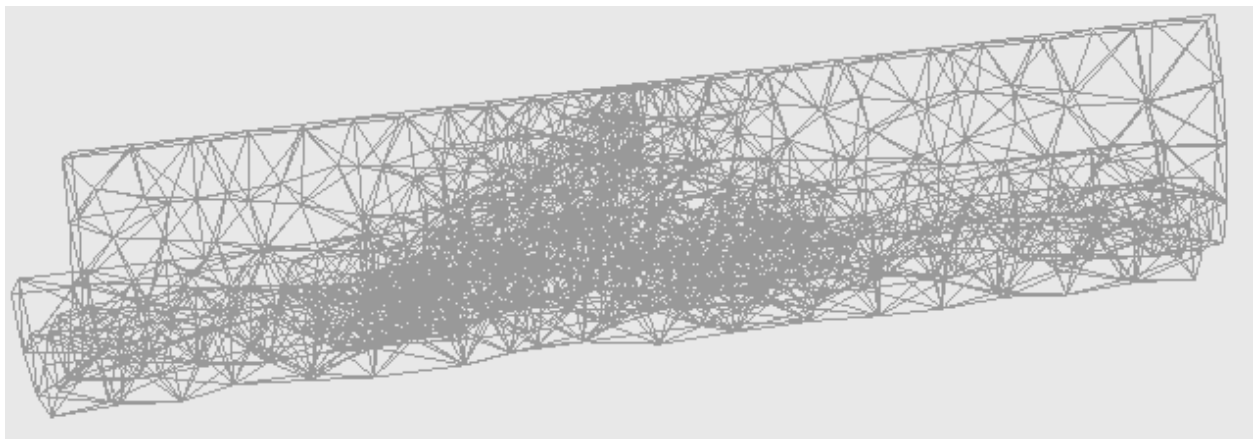


Figura 35. Malla de formada d'elements tetraèdrics de 3 nodes

Sòlids 3D:

Un cop demanem al programa d'elements finits que efectui els càlculs (Ramseries), el programa detecta que es tracta d'un problema de sòlids 3D i comença a calcular i assemblar totes les matrius de rigidesa, vector de forces nodals equivalents, vector de forces puntuals, per acabar resolent el problema i obtenir el valor de les seves tensions, deformacions i desplaçaments.

Cas Post-Procés 3D:

Primer de tot es requereix fer un estudi de convergència dels resultats obtinguts mitjançant diferents malles de diferents tipologies i mides d'elements per tal de verificar la bondat de la solució.

S'ha decidit fer el anàlisi de convergència per els desplaçaments verticals màxims de la presa (direcció y) sota carrega pròpia i no la convergència dels esforços, degut a que d'aquesta manera no correm el risc d'escollir un punt de concentració de tensions on els resultats no serien representatius.

Així mateix, les tipologies d'elements que s'han utilitzat han sigut el quadrilàter i triangles normals i quadràtics. Els càlculs s'han repetit per diferents mides de malla tal i com es pot observar a la següent taula.

Tipus d'element	Mida de la malla	Número d'elements	Número de nodes	Número de Graus de Llibertat	Fletxa màxima (m)
Triangular normal	70	2914	813	1626	-0,0023834
	40	4632	1259	2518	-0,0025688
	30	6338	1686	3372	-0,0025926
	25	8405	2188	4376	-0,0026055
	20	13158	3316	6632	-0,0026484
	12	52572	11499	22998	-0,0027636
	11	67387	14452	28904	-0,0027738
	10	89097	18716	37432	-0,002803
	9	120343	24817	49634	-0,0027932
	7	250783	49464	98928	-0,0028392
Triangular quadràtic	6	394857	76231	152462	-0,0028461
	100	2812	4940	9880	-0,0027928
	70	2914	5129	10258	-0,0027983
	40	4632	8031	16062	-0,0027421
	30	6338	10860	21720	-0,0028079
	20	13158	21866	43732	-0,0028433
	18	17073	27913	55826	-0,0028524
	16	24045	38304	76608	-0,0028794
	14	34101	53343	106686	-0,0028775
12	52572	80637	161274	-0,0028775	

Figura 36. Resultats de la fletxa màxima obtinguda en funció del tipus d'element i mida de la malla.

Aquests resultats han sigut representats mitjançant un gràfic (Figura 37) per poder interpretar ràpidament a partir de quin número de nodes cada tipologia de malla comença a convergir. Es pot

observar, que per elements triangulars normals requereixen de major nombre de nodes per a que la solució convergeixi (76231) nodes. Per altre costat, la malla amb elements triangular quadràtics aconseguix la convergència amb (53343) nodes. El assentament és mil·limètric i per aquest motiu s'ha buscat que la solució convergís amb un error de centèsimes de mil·límetre.

El tipus d'element que més ràpidament convergeix és el triangular quadràtic i per aquest motiu serà el utilitzat per fer els propers càlculs de les tensions de tracció deguda a pes propi i pes propi + pressió hidrostàtica. El número de nodes que s'utilitzarà serà de 53343 (mida del element = 14) per acabar d'assegurar la seva convergència i obtenir temps de càlcul raonables.

Fletxa màxima deguda a pes propi

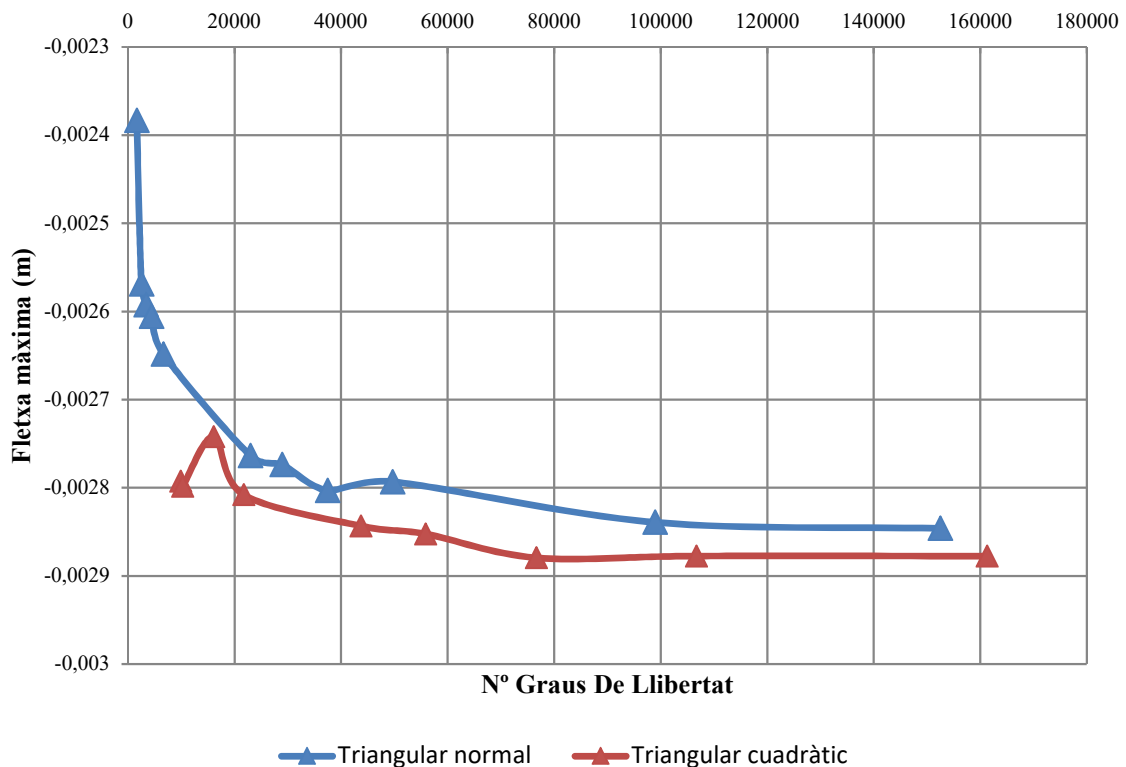


Figura 37. Anàlisi de convergència de la solució amb carrega de pes propi.

Un cop definida la malla a utilitzar per els propers càlculs, seguidament s'efectuarà el càlcul de les traccions màximes que apareixen tant en el cas amb carrega pròpia com en el cas carrega pròpia i pressió hidrostàtica.

Seguidament s'analitza els resultats de la fletxa obtinguts i les seves tensions de tracció.

Desplaçament vertical (Fase 1 - Pes propi):

Pel que al desplaçament vertical respecta, tornem a observar la simetria comentada en el cas 2D (Fase 1). Degut a la casi existència de simetria de carregues i forma, observem que tal i com era d'esperar, el terreny i la presa, com més pes tenen sota més s'enfonsen. Així doncs el punt d'assentament màxim és el de la cresta de la presa com era d'esperar i obtenim un de (2,8 mm).

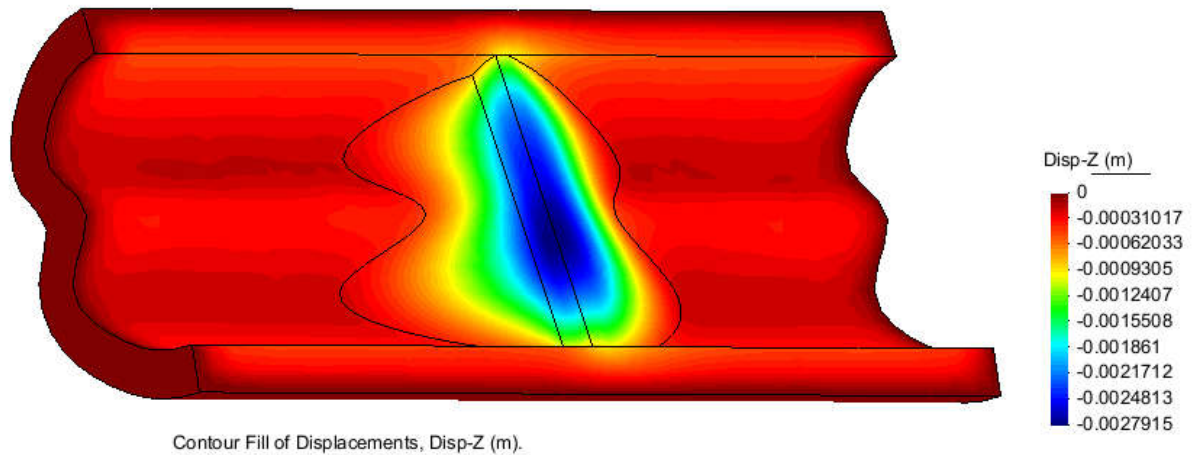


Figura 38. Resultats del asentament en fase 1.

Desplaçament vertical (Fase 2 - Pes propi i carrega hidrostàtica):

Com no podia ser d'altra manera, al introduir la carrega de l'aigua, es trenca la simetria de carregues i per tant també la simetria del desplaçament vertical del problema.

Observem que el punts on major quantitat d'aigua està fent pressió, es provoca una comprensió major, provocant una major assentament al costat esquerra (costat del aigua) que el costat dret (costat sense aigua). El valor del assentament es veu incrementat respecta la fase anterior també situat a la cresta de la presa amb un valor de 3,3 mm.

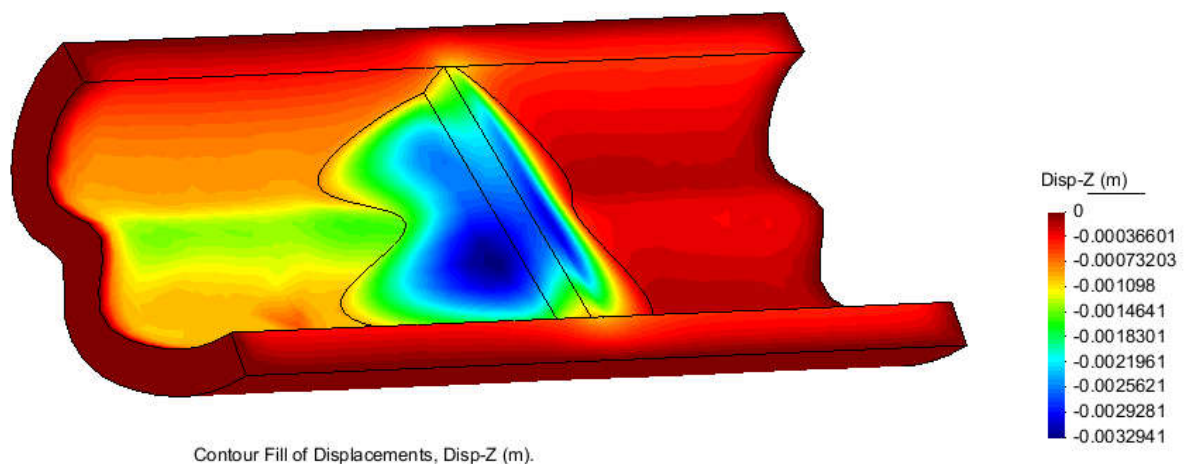


Figura 39. Resultats del asentament en fase 1.

Finalment s'arriba al punt final del anàlisi que és el estudi de les tensions resultants.

Tensió de tracció (Fase 1 - Pes propi):

Sota la carrega del pes propi observem que el problema té traccions de (0,46 Mpa) en la zona de contacte terreny-preses, superant el llimitar de 0,01 Mpa.

Per el que fa a les tensions de tracció concentrades al extrem del terreny, com son tensions que no afecten al contacte terreny presa i estan situades al extrem del terreny (simplificació de la realitat) podem ignorar aquestes.

No podem garantir el requisit de que les tensions de tracció al contacte terreny-preses no excedeix els 0.01 Mpa.

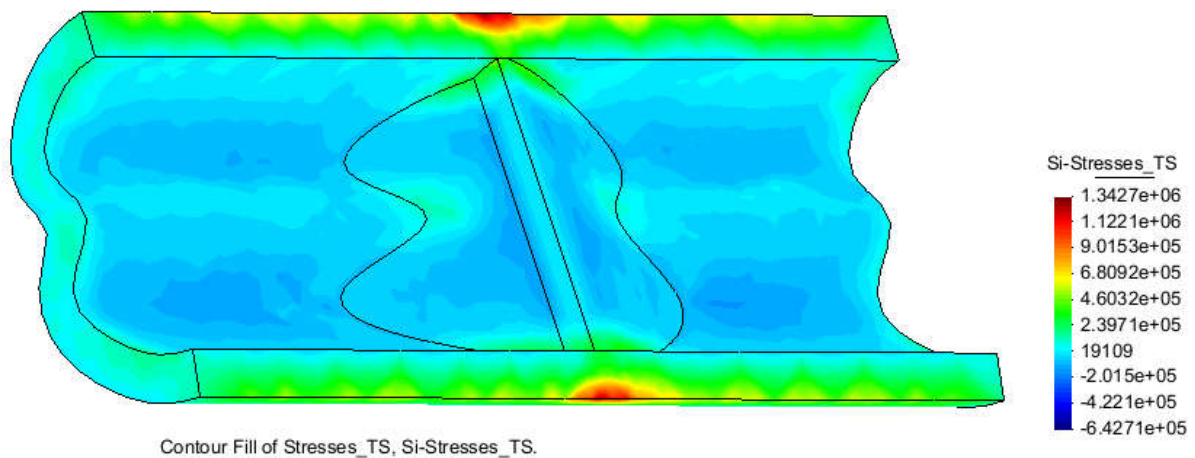


Figura 40. Resultats del tensions en fase 1.

Tensió de tracció (Fase 2 - Pes propi i carrega hidrostàtica):

Sembla a ser que el contacte superior entre la presa i el terreny podria ser un punt de conflicte. En cas es que s'excedeix la tensió de tracció de 0.01Mpa (1,8 Mpa) i per tant es refinarà la malla al voltat d'aquests punts per tal de garantir que els valors d'aquestes tensions son reals i no ficticis. També es produeix un màxim a la part superior esquerra del terreny.

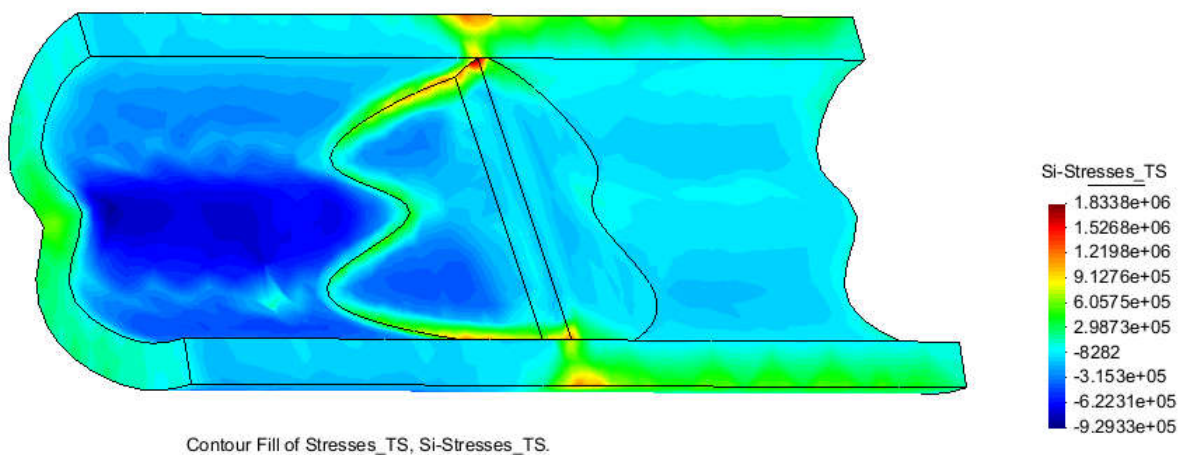


Figura 41. Resultats del tensions en fase 2.

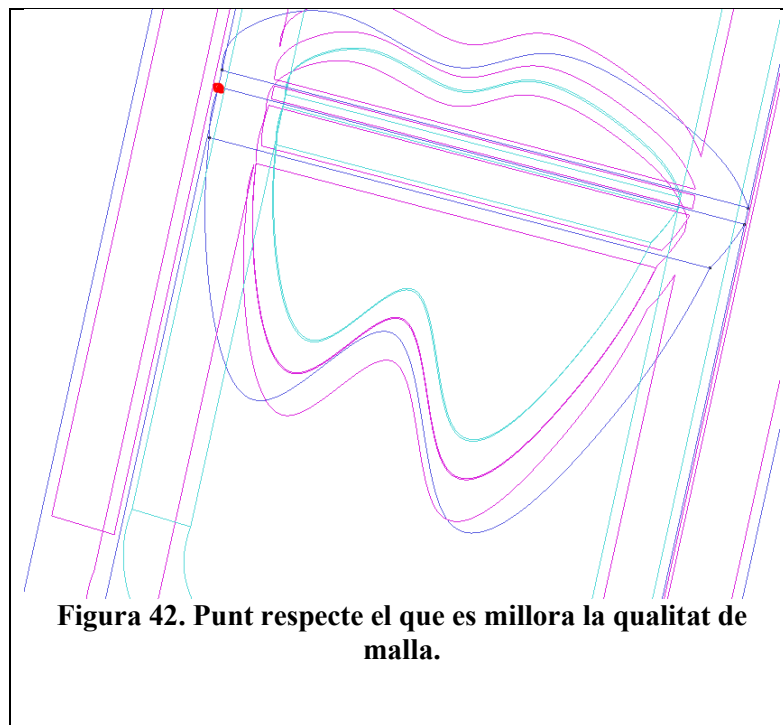
Els valors de tracció màxima obtinguts poden trobar-se a la següent taula:

	Valor traccions màximes (Mpa)
Carrega pròpia	0,46 Mpa
Carrega pròpia + Carrega hidrostàtica	1,83 Mpa

Taula 4. Tensions abans del seu analisis de convergencia.

Cap de les dues fases satisfà els requisits de traccions inferiors a 0.01 Mpa. Així doncs, a continuació es refinarà la malla al voltat de la creta de la presa per el cas més desfavorable (fase 2) per tal de garantir que els valors d'aquestes tensions son reals i no fictícies.

Com em observat que les traccions màximes a la fase 2 es donen al contacte presa-terreny, seguidament s'anirà avaluant si la tensió de tracció a un punt vermell de la Figura 42 a mida que es va refinant la malla al seu voltant.



Després de refinar la malla al voltant del punt i fer el anàlisis de convergència de les tensions de tracció, podem concloure que el valor final es de 1,61 Mpa , superant el llinar imposat (Figura 43).

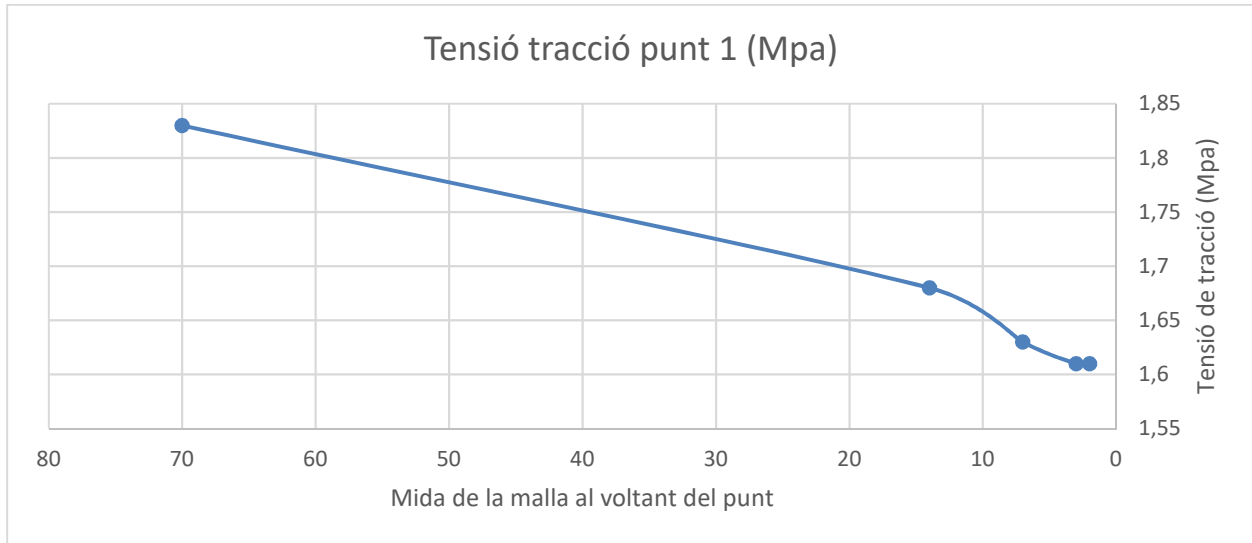


Figura 43. Anàlisi de convergència de les tensions.

Mida de la malla al voltant del punt	Tensió tracció punt 1 (Mpa)	Distància concentració (m)
70	1,83	9
14	1,75	7,52
7	1,66	4,8
3	1,6	2
2	1,61	1

Taula 5. Resultats Anàlisi de convergència

Conclusions

En aquest treball s'ha fet el anàlisi d'una presa de formigó sotmès a pes propi i carrega hidrostàtica amb la finalitat d'avaluar el seu comportament tensional. Un primer anàlisi 2D ha sigut realitzat primerament i posteriorment el model 3D ha servit per garantir la validesa del anterior. Cal destacar la dificultat que ha resultat el modelat del model 3D (interseccions, etc).

Els dos anàlisis han permès arribar a les següents conclusions:

-La presa està sotmesa bàsicament a compressió a excepció d'alguns punts on apareixen traccions.

-La pressió hidrostàtica trenca amb la simetria del problema.

-El element que més ràpid convergeix per els dos casos és el triangular quadràtic. Sembla a ser que aquest tipus d'element s'adapta fàcilment a les geometries irregulars.

-Una altre similitud ha estat que la tensió de tracció màxima és més alta per la fase 2 (Pes propi + Carrega hidrostàtica). Després d'analitzar el punt de concentració de tensions, el resultat final ha sigut de 1,6 Mpa. per el cas de

-També hem observat que els valors d'assentament són diferents (2D – 2,87 mm i 3D- 4,1 mm),entre aquests dos valors seria més realista el 3D.

- La presa amb material mínim no compleix el requisit de tensions menors a 0,01 Mp.

	2D	3D
Convergència més ràpida	Element triangular quadràtic	Element triangular quadràtic
Assentament màxim	2,87 mm	4,1 mm
Tensions de tracció màximes	1,83 Mpa (Fase2)	6,67 (Fase 2)

Taula 6. Taula de comparació 2D i 3D

Cal dir que aquestes diferències podrien ser degudes a que hem considerat en un cas que el terreny era pla (2D) i en el altre li hem donat forma (3D). No obstant, tant els resultats del model 2D i 3D tenen sentit físic i el assentament de la presa serà molt petit. Això pot ser degut a que el formigó és un element molt rígid i per tant accepta poques deformacions. El assentament de la presa vindrà donat majoritàriament per l'assentament del terreny.

Finalment, destacar la gran versatilitat que atorga el coneixement d'elements finits a la hora d'analitzar problemes de qualsevol tipus. Aquest a més es poden abordar de maneres diferents (Teories diferents) en 2D i 3D i permeten que els enginyers, amb un pensament crític pugui decidir quina és la opció més òptima per resoldre el problema.

Per finalitzar, remarcar que s'ha de tenir present la concentració de tensions i estudiar sempre la convergència de malla per assegurar la bondat dels resultats.

REFERENCES

- [1]. Oñate E., Structural Analysis with the Finite Element Method Linear Statics, Volume 1: Basis and Solids (Lecture Notes on Numerical Methods in Engineering and Sciences), Springer 2009.
- [2]. Agudelo J., De las carretas a los tanques de combate. Qué cargas se han considerado para calcular puentes, desde 1843 hasta hoy. [Article] -28 de 4 de 2013 - <http://estructurando.net/2013/04/28/de-las-carretas-a-los-tanques-de-combate-que-cargas-se-han-considerado-para-calculer-puentes-desde-1843-hasta-hoy/> (Visitado el: 23-01-2019).