

---

# Trabajo de curso L-36

---

## Ingeniería de Estructuras

---

Sergi Mas  
47957236M

---

Curso 2017-18  
Cuadrimestre 1  
Master en Ingeniería de Caminos, Canales y Puertos  
E.T.S. d'Enginyers de Camins, Canals y Ports de Barcelona  
Universitat Politècnica de Catalunya

---

## Índice

Descripción del problema .....	2
Aspectos teóricos .....	3
Pre-proceso .....	6
Malla y análisis de convergencia .....	8
Dimensionamiento del espesor y resultados .....	11
Conclusiones .....	12

## L-36

### Descripción del problema

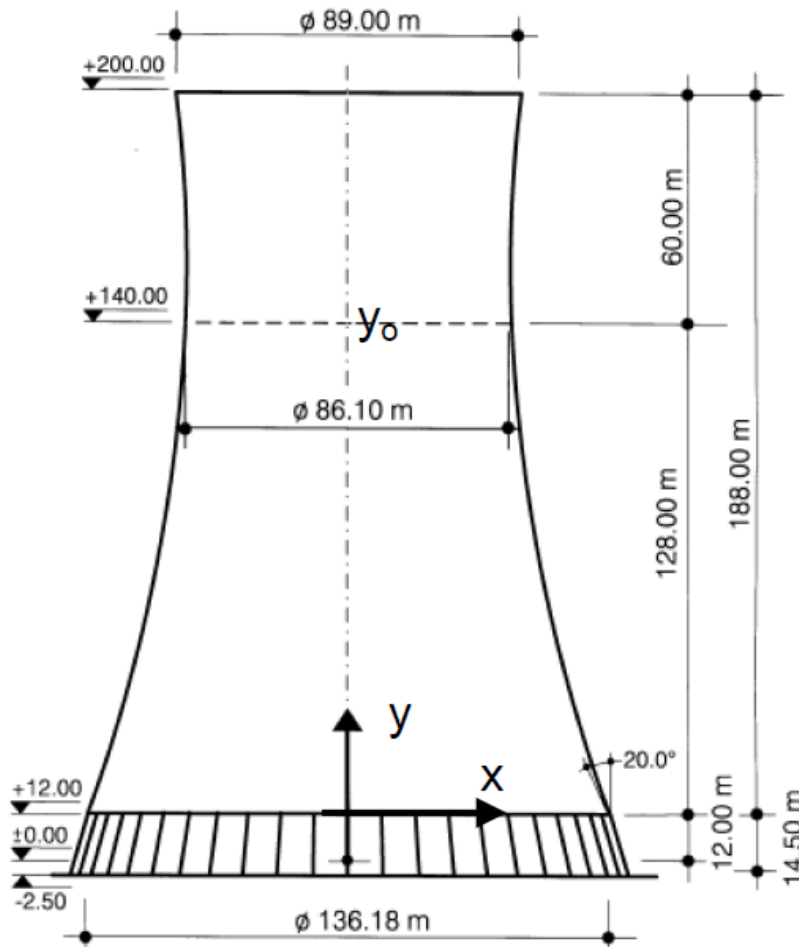
Se pide dimensionar el espesor de una torre de enfriamiento formada por una lámina de hormigón armado. Teniendo en cuenta los siguientes parámetros:

- 1) Las tracciones máximas en cualquier punto de la estructura no deben superar los 40 MPa
- 2) Las compresiones máximas en cualquier punto de la estructura no deben superar los 80 MPa
- 3) Las propiedades mecánicas del hormigón son:  $E = 19.8 \text{ KN/mm}^2$   $\nu = 0.18$
- 4) El apoyo proporcionado por las columnas se puede suponer como simplemente apoyado.

Cargas actuantes:

- a) Peso propio

Geometría de la torre:



### Aspectos teóricos

Tal y como se extrae de una observación rápida de la geometría de la torre, se trata de un problema que cumple todos los requisitos para ser tratado como *lámina de revolución* y utilizar la *Teoría de Láminas de Revolución de Reissner-Mindlin*. Dicha teoría se basa en las siguientes hipótesis:

- 1) Las cargas son de revolución.
- 2) El espesor de la lámina no cambia con la deformación.
- 3) La tensión en la dirección normal a la generatriz  $\sigma_z$  es nula.
- 4) Las normales a la generatriz antes de la deformación permanecen rectas, pero no necesariamente normales a la generatriz después de la deformación.

Esta cuarta hipótesis sobre no ortogonalidad de la normal es idéntica a la establecida en las teorías de vigas de Timoshenko y de flexión de placas y láminas planas de Reissner-Mindlin.

### Campo de desplazamientos

A causa de la simetría de revolución, todas las secciones meridionales se van a deformar de la misma forma y en su mismo plano. He ahí que el campo de desplazamientos de dicho modelo en coordenadas locales se exprese solamente en función de coordenadas radiales, verticales y por la rotación en su *vector de movimientos locales*:

$$\mathbf{u}' = [u'_0 \quad w'_0 \quad \theta]^T$$

Y su análogo en movimientos globales se consigues a través de la transformación:

$$\mathbf{u}' = \begin{pmatrix} u'_0 \\ w'_0 \\ \theta \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \phi & \sin \phi & 0 \\ -\sin \phi & \cos \phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} u_0 \\ w_0 \\ \theta \end{pmatrix} = \mathbf{L} \mathbf{u}$$

### Campo de deformaciones

Tenemos que las deformaciones  $\gamma_{x'y'}$ ,  $\gamma_{x'z'}$  y  $\epsilon_{z'}$  no se consideran, las dos primeras por el hecho de la propia simetría la cual las hace nulas, mientras que la tercera, al ser  $\sigma_z$  nula no hace falta considerarla ya que no realiza trabajo. Así pues, el *vector de deformaciones generalizadas* no nulas es:

$$\boldsymbol{\epsilon}' = \begin{Bmatrix} \hat{\epsilon}'_m \\ 0 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} z' \hat{\epsilon}'_f \\ \hat{\epsilon}'_c \end{Bmatrix}$$

Dónde:

$$\hat{\epsilon}'_m = \begin{Bmatrix} \frac{\partial u'_0}{\partial s} - \frac{w'_0}{R} \\ \frac{u'_0 \cos \phi - w'_0 \sin \phi}{x} \end{Bmatrix} \quad \hat{\epsilon}'_f = \begin{Bmatrix} -\frac{\partial \theta}{\partial s} \\ -\frac{\theta \cos \phi}{x} \end{Bmatrix} \quad y \quad \hat{\epsilon}'_c = \left\{ \frac{\partial w'_0}{\partial s} + \frac{u'_0}{R} - \theta \right\}$$

Son respectivamente deformaciones de membrana, flexión y cortante respectivamente.

### Campo de tensiones y esfuerzos

Así se define el *vector de tensiones locales*:

$$\boldsymbol{\sigma}' = \begin{Bmatrix} \sigma_{x'} \\ \sigma_{\varphi} \\ \dots \\ \tau_{x'z'} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \boldsymbol{\sigma}'_m \\ \dots \\ \boldsymbol{\sigma}'_c \end{Bmatrix}$$

Dónde  $\sigma_{x'}$ ,  $\sigma_{\varphi}$  y  $\tau_{x'z'}$  son respectivamente las tensiones radial, circunferencial y tangencial.

La relación con las deformaciones se obtiene modificando la ecuación constitutiva de la elasticidad tridimensional:

$$\boldsymbol{\sigma}' = \frac{E}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\alpha(1-\nu)}{2} \end{bmatrix} \boldsymbol{\epsilon}' = \begin{bmatrix} \mathbf{D}'_m & 0 \\ \dots & \dots \\ 0 & \mathbf{D}'_c \end{bmatrix} \boldsymbol{\epsilon}'$$

En cuanto al vector de esfuerzos locales, se define como:

$$\hat{\boldsymbol{\sigma}}' = \begin{Bmatrix} \boldsymbol{\sigma}'_m \\ \dots \\ \boldsymbol{\sigma}'_f \\ \dots \\ \boldsymbol{\sigma}'_c \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} N_{x'} \\ N_{\varphi} \\ \dots \\ M_{x'} \\ M_{\varphi} \\ \dots \\ Q_{z'} \end{Bmatrix} = \int_{-\frac{t}{2}}^{\frac{t}{2}} \begin{Bmatrix} \sigma_{x'} \\ \sigma_{\varphi} \\ \dots \\ z' \sigma_{x'} \\ z' \sigma_{\varphi} \\ \dots \\ \tau_{x'z'} \end{Bmatrix} dz' = \int_{-\frac{t}{2}}^{\frac{t}{2}} \begin{Bmatrix} \boldsymbol{\sigma}'_m \\ \dots \\ z' \boldsymbol{\sigma}'_m \\ \dots \\ \boldsymbol{\sigma}'_c \end{Bmatrix} dz'$$

El cual se define como:

$$\hat{\boldsymbol{\sigma}}' = \hat{\mathbf{D}}' \hat{\boldsymbol{\epsilon}}'$$

Dónde:

$$\hat{\boldsymbol{\epsilon}}' = \begin{Bmatrix} \hat{\boldsymbol{\epsilon}}'_m \\ \hat{\boldsymbol{\epsilon}}'_f \\ \hat{\boldsymbol{\epsilon}}'_c \end{Bmatrix} \quad \text{y} \quad \hat{\mathbf{D}}' = \int_{-\frac{t}{2}}^{\frac{t}{2}} \begin{bmatrix} \mathbf{D}'_m & z' \mathbf{D}'_m & 0 \\ z' \mathbf{D}'_m & (z')^2 \mathbf{D}'_m & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{D}'_c \end{bmatrix} dz' = \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{D}}'_m & \hat{\mathbf{D}}'_{mf} & 0 \\ \hat{\mathbf{D}}'_{mf} & \hat{\mathbf{D}}'_f & 0 \\ 0 & 0 & \hat{\mathbf{D}}'_c \end{bmatrix}$$

### Principio de trabajos virtuales

Si se utiliza las propiedades que nos proporciona el hecho de que el cuerpo y el problema en general sean de revolución, el PTV se simplifica de la siguiente forma:

$$2\pi \iint_A \delta \boldsymbol{\varepsilon}'^T \boldsymbol{\sigma}' x dA = 2\pi \int_s \delta \mathbf{u}'^T \mathbf{b}' t x ds + 2\pi \int_s \delta \mathbf{u}'^T \mathbf{t}' x ds + \sum_i 2\pi x_i \delta \mathbf{u}'_i^T \mathbf{p}'_i$$

Donde  $\mathbf{b}'$ ,  $\mathbf{t}'$  y  $\mathbf{p}'$  son los vectores de fuerzas de revolución másicas, de superficie y puntuales.

Utilizando la nomenclatura anterior de tensions y esfuerzos, el primer término se puede modificar y obtenemos:

$$\begin{aligned} & 2\pi \iint_A \delta \boldsymbol{\varepsilon}'^T \boldsymbol{\sigma}' x dA = \\ & = 2\pi \int_s \int_{-\frac{t}{2}}^{+\frac{t}{2}} \left( \delta \widehat{\boldsymbol{\varepsilon}}'_m{}^T \boldsymbol{\sigma}'_m + \delta \widehat{\boldsymbol{\varepsilon}}'_f{}^T z' \boldsymbol{\sigma}'_m + \delta \widehat{\boldsymbol{\varepsilon}}'_c{}^T \boldsymbol{\sigma}'_c \right) x ds dz' = \\ & = 2\pi \int_s \left( \delta \widehat{\boldsymbol{\varepsilon}}'_m{}^T \widehat{\boldsymbol{\sigma}}'_m + \delta \widehat{\boldsymbol{\varepsilon}}'_f{}^T z' \widehat{\boldsymbol{\sigma}}'_f + \delta \widehat{\boldsymbol{\varepsilon}}'_c{}^T \widehat{\boldsymbol{\sigma}}'_c \right) x ds = \\ & = 2\pi \int_s \delta \widehat{\boldsymbol{\varepsilon}}'^T \widehat{\boldsymbol{\sigma}}' x ds \end{aligned}$$

### Pre-proceso

Aunque se haya detallado la explicación teórica de la teoría de láminas de revolución el acercamiento de cara a la solución de dicho problema se hace mediante el análisis de un cuarto de la figura, y extrapolando los resultados, gracias a la simetría que existe, al conjunto de la figura.

Seguramente se incurrirá en un mayor coste computacional pero el análisis podrá ser igualmente acertado y válido.

### Geometría

Primeramente definimos la geometría de la estructura definiendo los radios que se nos proporcionan y los pendientes. Obtenemos la siguiente figura:

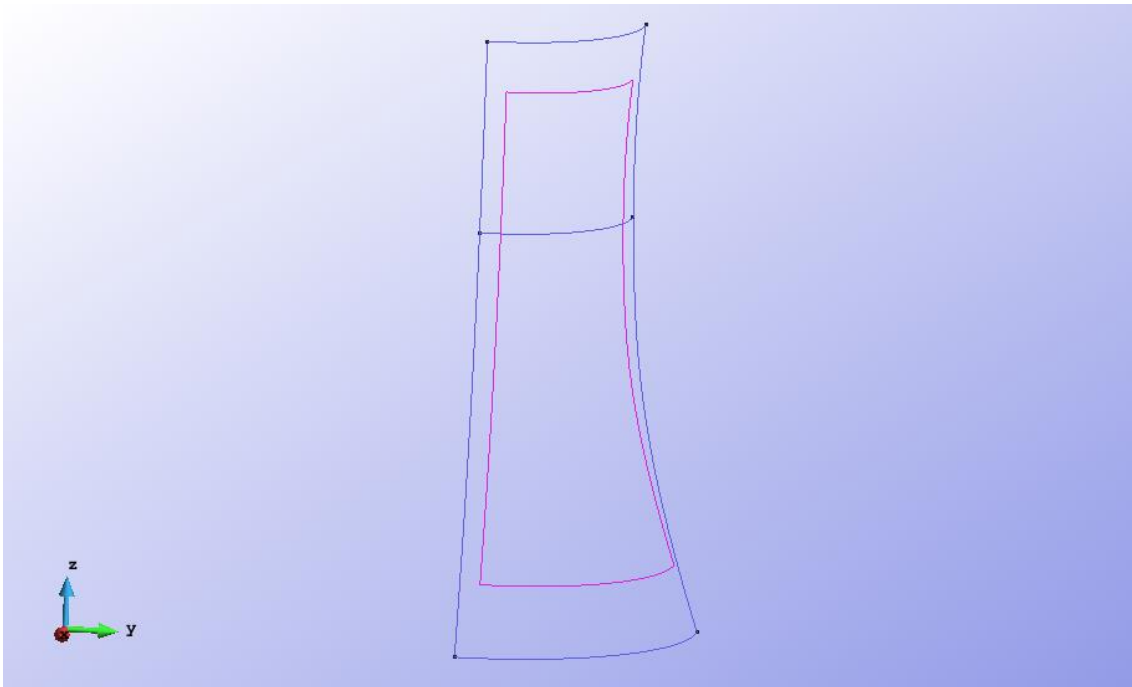


Figura 1. Geometría del cuarto de torre

### Condiciones de contorno

Se van a aplicar tres condiciones de contorno. La primera viene dada por el enunciado del problema y se considera que las columnas proporcionan un apoyo simple a la base de la torre.

Las dos que faltan son condiciones dadas por la simetría del problema y el hecho de que se esté analizando un cuarto de la figura. En la *figura 2* se ve de color verde la condición de simetría para dicho lado, con impedimento de movimiento en dirección "y" y giro "z", y lo propio para el lado amarillo con impedimento de movimiento en "x" y de giro "z".

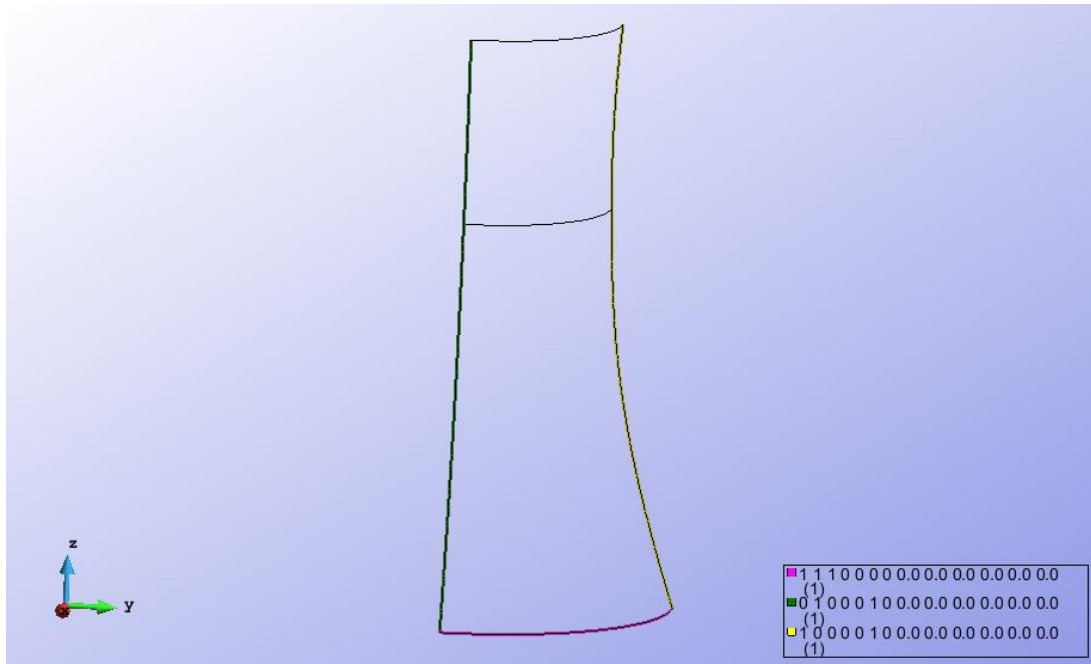


Figura 2. Condiciones de contorno del cuarto de torre

### Material

Tal y como indica el enunciado, se han introducido las siguientes características al material:

$E= 19,8 \text{ KN/mm}^2$  y  $\nu=0,18$ , además de utilizarse un peso específico de  $25000\text{N/m}^3$ , como típico peso específico del hormigón.

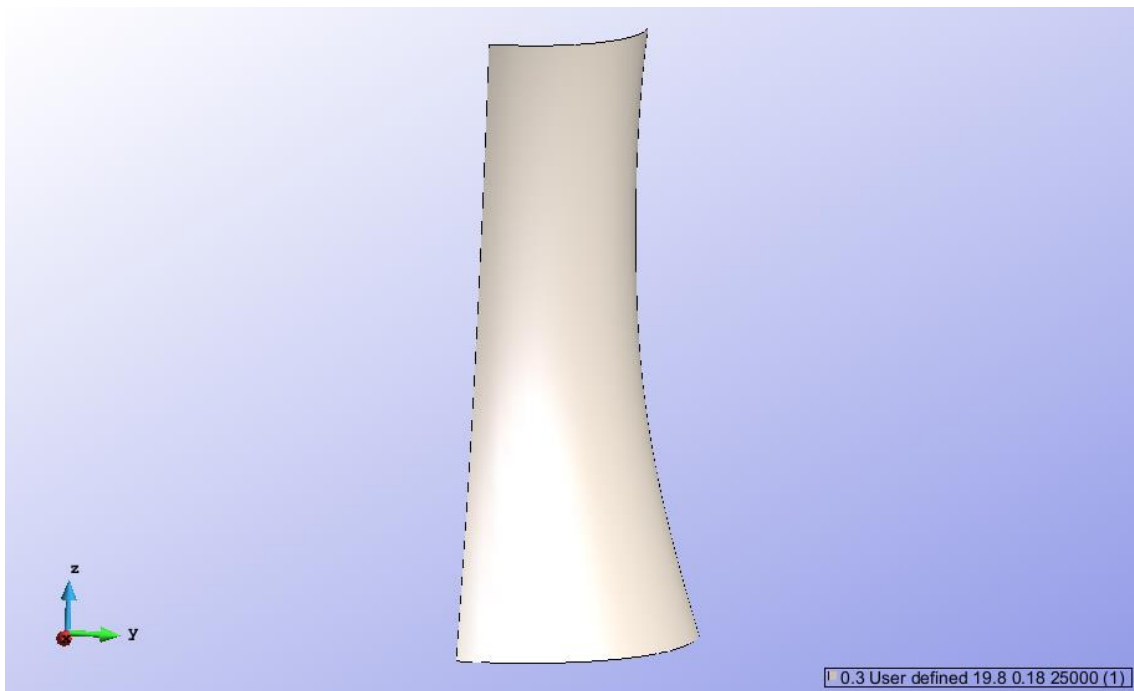


Figura 3. Material del cuarto de torre



## Cargas

La única carga actuante en este problema es el peso propio.

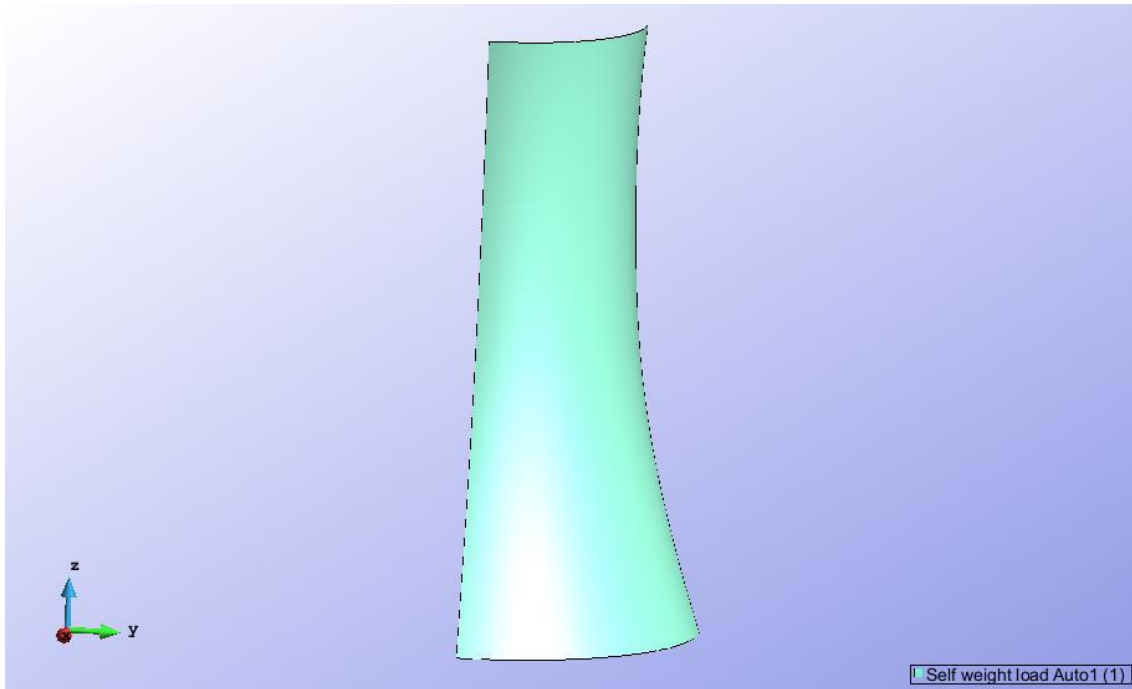


Figura 4. Cargas del cuarto de torre

## Malla y análisis de convergencia

Caracterizada la geometría y las propiedades del material, podemos pasar ya al análisis de convergencia y selección de la malla.

Para ello se utilizan mallas no estructuradas de elementos triangulares de tres nodos ya que permitirán adaptarse a la geometría de la estructura

Empezamos con un tamaño de malla de 7 metros y vamos bajando hasta encontrar convergencia de resultados de desplazamientos.

Remarcar que el análisis de convergencia se realiza con un espesor inicial de 0,3 metros.

A continuación se muestran los resultados y gráfica del análisis de convergencia realizado a partir del cual se decidirá el tamaño de mallado óptimo a escoger para realizar el dimensionamiento del espesor adecuado.

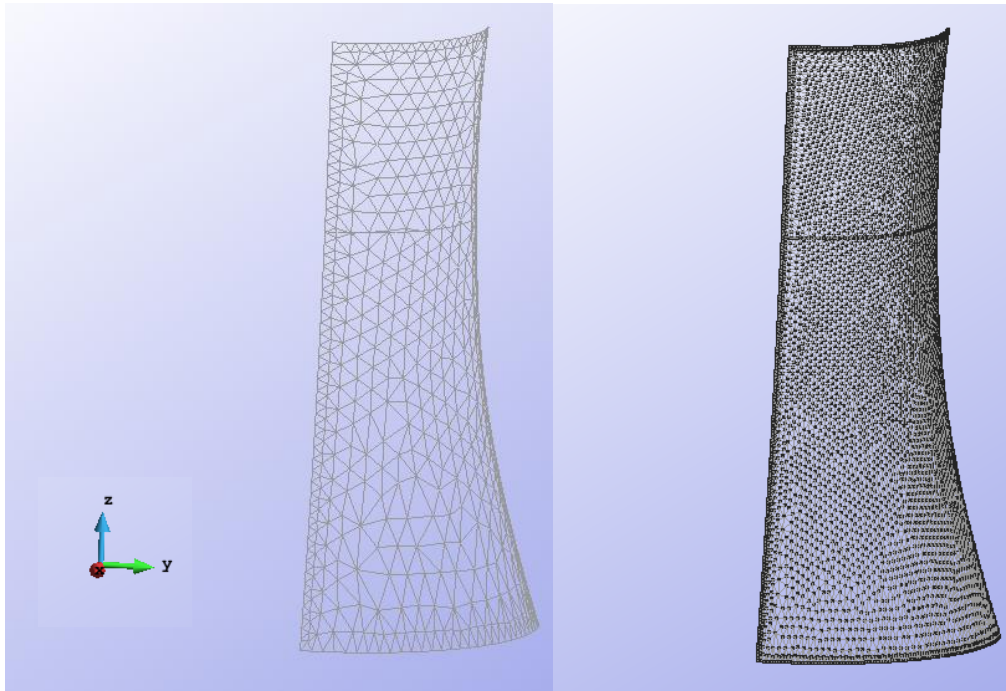


Figura 5. Malla de tamaño 7 y 2 metros respectivamente del cuarto de torre

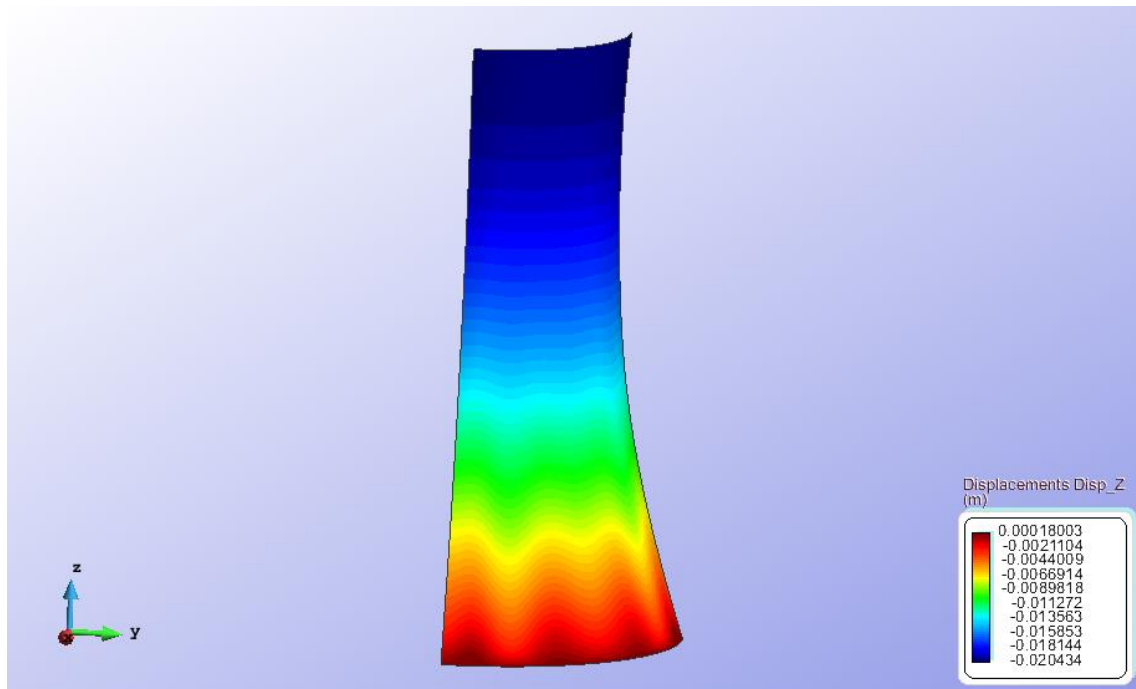


Figura 6. Campo de desplazamientos vertical del cuarto de torre con malla de tamaño 2 metros

Tabla 1. Resultados del análisis de convergencia de los elementos triangulares

Malla	Nº Nodos	Despl. Z max	Error rel.	Error abs.
7	599	0,02073	0,0290%	0,00029
5	1035	0,02055	0,0110%	0,00011
2,5	3461	0,020431	-0,0009%	-9E-06
2	5157	0,020434	-0,0006%	-6E-06
1	18747	0,02044	0,0000%	0

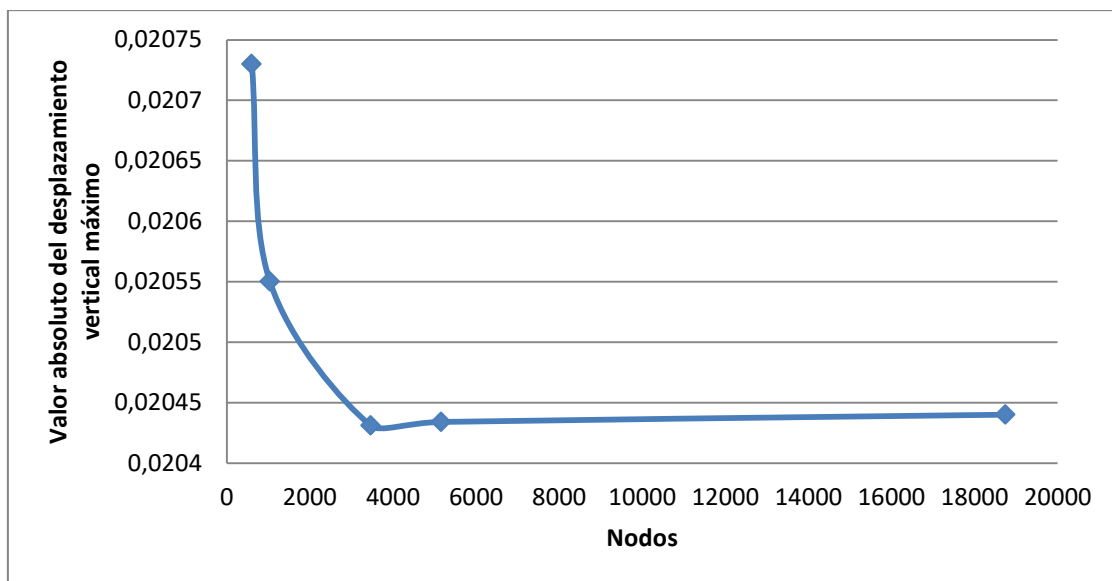


Figura 7. Gráfica de convergencia de los elementos triangulares

Como se ve al analizar la gráfica de convergencia del tamaño de malla vemos que la convergencia nos aparece alrededor de los 3461 nodos. Detalladamente, en la tabla de resultados se aprecia que para este valor el tamaño de malla es el de 2,5 metros, tamaño del que si comprobamos el error relativo en comparación a la malla más detallada que se ha calculado y tomando esta como valor exacto, se obtiene un error relativo de  $9 \cdot 10^{-4}\%$  y se ve como hay una diferencia entre la magnitud del error relativo con respecto a tamaños de malla superiores, sin embargo ya nos quedamos en el mismo orden de magnitud para mallas más finas. Este hecho nos indica que mallas más finas que esta ya no nos estarían aportando un grado de precisión mayor al coste computacional que supondrían. Dicho esto, **la malla seleccionada para el análisis del espesor es la de 3461 nodos y tamaño 2,5 metros.**

## Dimensionamiento del espesor y resultados

A partir de ahora y con la malla seleccionada vamos a calcular las tracciones y compresiones máximas debidas a peso propio que aparecen en la torre y ver si estas son superiores en algún caso a los 40 y 80 MPa respectivamente.

Para ello se va a reproducir el problema simplemente modificando en el apartado de material, el espesor por el valor en cuestión que se quiera modelar en cada caso.

Se empezará con un espesor de 2 metros y se irá reduciendo para ver qué sucede con espesores menores y ver si son suficientes para sustentar la torre.

Tabla 2. Resultados de compresiones y tracciones para diferentes espesores

Espesor	Tracciones	Compresiones
2	0,1035 MPa	3,954 MPa
1	0,11177 MPa	4,1821 MPa
0,5	0,12659 MPa	4,4784 MPa

Tal y como se deduce de los resultados obtenidos, los valores de tracción y compresión no alcanzan en ningún caso lo 40MPa ni los 80MPa respectivamente. No se ha refinado más el espesor de la torre ya que empezaban a aparecer irregularidades en la distribución de los esfuerzos que cabría esperar, no seguían la lógica que se esperaría de ellos, seguramente debido al demasiado refinamiento de la pared, pero incluso en tales casos, y en los puntos de acumulación de esfuerzos, los valores continuaban teniendo las magnitudes que en la tabla anterior se muestran, comprobando así la no influencia del peso propio en la estabilidad de la torre. Además, espesores tan finos no podrían ser nunca realizados ya que se tienen que garantizar unos mínimos espesores para prevenir la aparición de fisuras y grietas en una estructura tan esbelta.

**Por todo ello se decide que un óptimo espesor es el de 0,5 metros.**

A continuación se muestran las figuras de los resultados obtenidos.

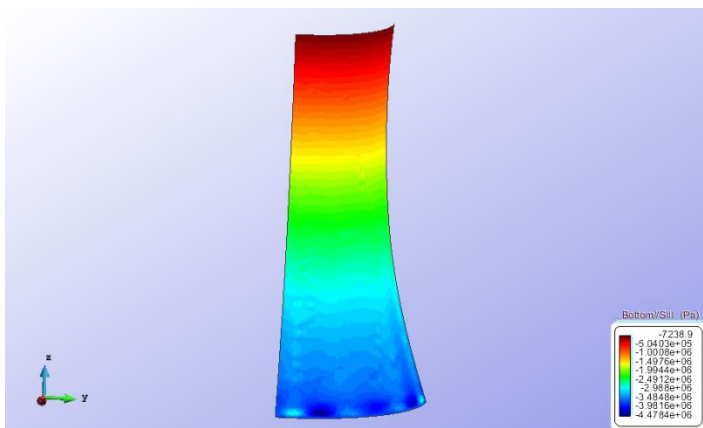


Figura 8. Compresiones con espesor de 0,5 metros

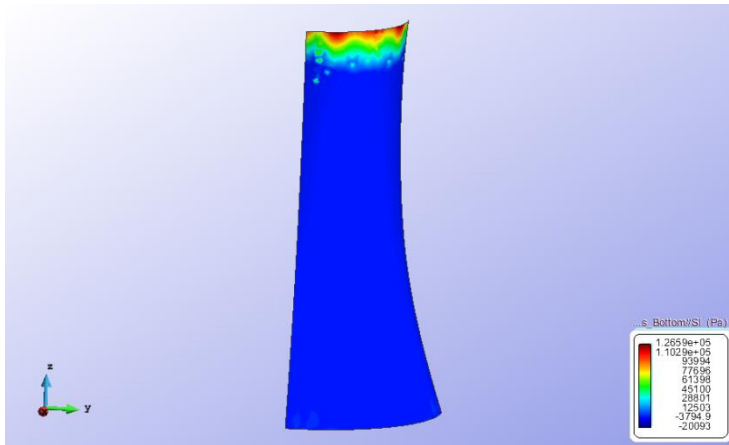


Figura 9. Tensiones con espesor de 0,5 metros

## Conclusiones

Una vez visto el problema en su globalidad, vemos que:

El peso propio no tiene prácticamente influencia en el dimensionamiento estructural de las torres de refrigeración tal y como se ha visto en los resultados obtenidos en el análisis.

Aún así, las compresiones máximas se producen en la base de la torre mientras que las tracciones máximas se producen en la parte más superior de esta.

Este problema se ha analizado con elementos triangulares de tres nodos, pero con un mismo nivel de precisión se podría realizar también con elementos cuadriláteros. No obstante lo ideal para este tipo de problema sería utilizar elementos troncocónicos.

Para finalizar, resaltar que no se puede refinar el espesor indefinidamente ya que empiezan a aparecer concentraciones de esfuerzos no representativos que alteran los resultados reales en cuanto a esfuerzos máximos se refiere.