

Trabajo Final

Gustavo Alberto Valencia Corredor

Cálculo de estructuras por el método de elementos finitos



Universitat Politècnica de Catalunya
Master en Estructuras y Construcción
Barcelona, 2015.



Tabla de contenido

PROBLEMA S-29	4
Análisis del Problema	5
Resumen Teoría Básica Deformación Plana.....	5
Teoría Básica Solidos tres Dimensiones.....	8
Modelo 2D Preproceso	10
Geometría	10
Restricciones de desplazamiento.....	10
Cargas.....	11
Material.....	12
Selección de malla (Convergencia).....	12
Justificación de la elección de la pendiente de los taludes de la presa	15
Modelo 2D Postproceso	15
Presa sometida únicamente a peso propio.....	15
Presa con peso propio + carga hidrostática en el suelo y la presa.....	18
Preproceso modelo 3D.....	20
Geometría 3D	20
Restricciones de desplazamiento 3D	21
Cargas 3D.....	22
Materiales 3D	22
Selección de malla (convergencia) 3D.....	23
Modelo 3D Postproceso	25
Presa sometida únicamente a peso propio.....	25
Presa sometida a peso propio y carga hidrostática.	29
Comparación de resultados 2D y 3D.....	32
Conclusiones	33



PROBLEMA L-37	35
Análisis del problema	36
Resumen Teoría Básica Solidos de revolución	36
Modelo 3D Preproceso	39
Geometría Panteón 3D.....	39
Restricciones de desplazamiento Panteón 3D	40
Cargas	40
Material	41
Selección de malla (Convergencia). Panteón 3D.....	41
Factor de seguridad.....	46
Modelo Solidos de revolución, Preproceso.	47
Geometría Panteón Solidos de revolución.....	47
Restricciones de desplazamiento solidos de revolución.....	47
Cargas solidos de revolución	48
Material solidos de revolución	48
Selección de malla (Convergencia). solidos de revolución	49
Factor de seguridad.....	53
Comparación de resultados 3D y solidos de revolución	53
Conclusiones	54

PROBLEMA S-29

Dimensionar y calcular una presa de gravedad de hormigón de 48 m de altura. La anchura en coronación debe ser de 6 m con las restricciones geométricas que se indican.

Realizar el proyecto mediante un análisis dimensional y posteriormente en 3D para verificar el diseño utilizando en ambos casos las siguientes hipótesis:

- ✓ Las restricciones máximas en cualquier punto de la presa no debe superar 0.5 MPa.
- ✓ El peso específico del hormigón es de 25000 N/m^3 y del terreno es de 20000 N/m^3 .
- ✓ El módulo de elasticidad del hormigón a usar es de 22 G N/m^2 y el coeficiente de poisson es de 0.20.
- ✓ Base empotrada en el terreno.
- ✓ Cimentación en terreno homogéneo. Módulo de elasticidad: 37 G N/m^2 y el coeficiente de poisson es de 0.30
- ✓ Cargas actuantes: Pesor propio, empuje hidrostático en presa y cimentación (altura del agua 46 m.)

El perfil de emplazamiento es el que se muestra. La sección del tiene un ancho de 30 m y un desarrollo de 200 m.

Figura 1 Perfil del terreno

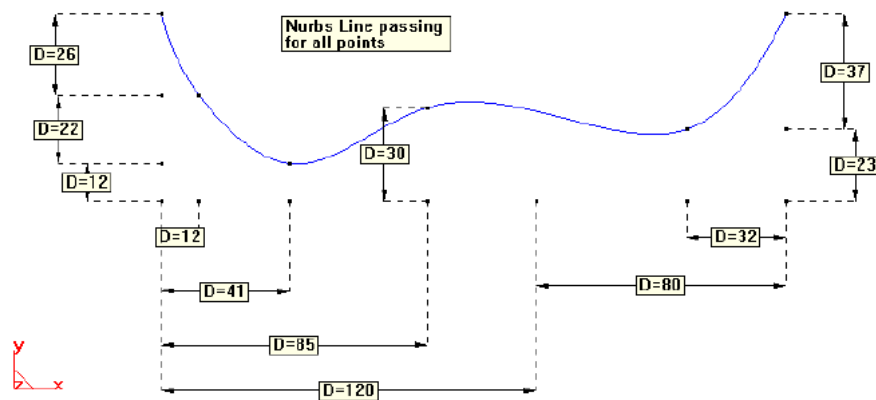
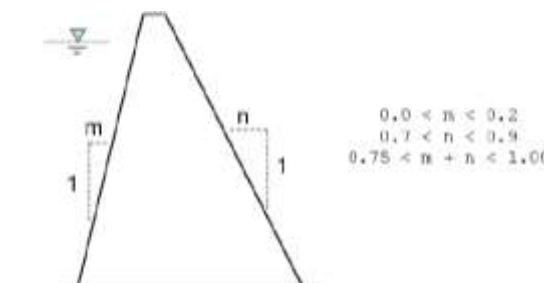


Figura 2 Condiciones para el diseño de taludes de la presa



Análisis del Problema.

El comportamiento de la presa en 2D se analizara como un problema de elasticidad bidimensional y más específicamente un **problema de deformación plana** debido a que una de sus dimensiones (longitud) es mucho mayor que las otras dos, y sobre ella actúan únicamente cargas uniformemente distribuidas a lo largo de toda su longitud y contenidas en planos ortogonales al eje que une los centros de gravedad de sus distintas secciones transversales.

Resumen Teoría Básica Deformación Plana.

✓ Campo de desplazamientos

Las características geométricas y de cargas de una estructura en estado de *deformación plana* permiten establecer la hipótesis de que todas las secciones perpendiculares al eje prismático z se deforman en su plano y de manera idéntica. Por consiguiente basta con conocer el comportamiento de cualquiera de dichas secciones. El vector de desplazamientos en cualquier punto se define como:

$$\mathbf{u}(x, y) = \begin{Bmatrix} u(x, y) \\ v(x, y) \end{Bmatrix}$$

Donde $u(x, y)$ y $v(x, y)$ son desplazamientos del punto en direcciones de los ejes x e y, respectivamente.

✓ Campo de deformaciones

El campo de desplazamientos se deduce haciendo uso de la teoría general de la elasticidad. Partiendo de estos desplazamientos se generan las deformaciones y resultado es el vector de deformaciones significativas que se presenta a continuación

$$\boldsymbol{\varepsilon} = [\varepsilon_x, \varepsilon_y, \gamma_{xy}]^T$$

Cabe resaltar que en el caso de deformación plana, la deformación longitudinal ε_z se supone nula.

✓ Campo de Tensiones

Hay que tener en cuenta que debido a que la deformación longitudinal ε_z es nula la tensión σ_z no trabaja. El vector de tensiones significativas es

$$\boldsymbol{\sigma} = [\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}]^T$$

✓ **Relación Tensión – Deformación.**

La relación entre tensiones y deformaciones se deduce de la ecuación constitutiva de la elasticidad tridimensional. Tras realizar las operaciones correspondientes con las condiciones anteriormente comentadas puede encontrarse la siguiente relación matricial entre tensiones y deformaciones.

$$\sigma = \mathbf{D} \varepsilon$$

Donde D es la matriz constitutiva o matriz de constantes elásticas y contiene los siguientes términos:

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} d_{11} & d_{12} & 0 \\ d_{21} & d_{22} & 0 \\ 0 & 0 & d_{33} \end{bmatrix}$$

Se puede deducir que D es simétrica. Cuando se tiene una elasticidad isotrópica los términos de la matriz para deformación plana son los siguientes:

$$\begin{aligned} d_{11} = d_{22} &= \frac{E(1-\nu)}{(1+\nu)(1-2\nu)} \\ d_{12} = d_{21} &= d_{11} \frac{\nu}{1-\nu} \\ d_{33} &= \frac{E}{2(1+\nu)} = G \end{aligned}$$

✓ **Principio de Trabajos Virtuales**

La expresión integral de equilibrio en problemas de elasticidad bidimensional puede obtenerse haciendo uso del Principio de Trabajos Virtuales. Así, teniendo en cuenta las tensiones y deformaciones que contribuyen al trabajo virtual de la estructura la expresión puede escribirse de la siguiente manera:

$$\int \int_A \delta \varepsilon^T \sigma \, t dA = \int \int_A \delta \mathbf{u}^T \mathbf{b} \, t dA + \int_{\Gamma} \delta \mathbf{u}^T \mathbf{t} \, t ds + \sum_i \delta \mathbf{u}_i^T \mathbf{q}_i$$

Donde el primer miembro de la ecuación representa el trabajo que las tensiones realizan sobre las deformaciones virtuales. Por otro lado el segundo miembro de la ecuación representa el trabajo de las fuerzas repartidas por unidad de volumen, las fuerzas repartidas sobre el contorno y las fuerzas puntuales sobre los desplazamientos virtuales.

✓ Ecuaciones de equilibrio de la discretización

Para la obtención de las ecuaciones de equilibrio de la discretización se parte del PTV comentado anteriormente. Operando esta expresión obtenemos

$$\iint_{A^{(e)}} \delta \boldsymbol{\varepsilon}^T \boldsymbol{\sigma} t dA - \iint_{A^{(e)}} \delta \mathbf{u}^T \mathbf{b} t dA - \int_{l^{(e)}} \delta \mathbf{u}^T \mathbf{t} t ds = [\delta \mathbf{a}^{(e)}]^T \mathbf{q}^{(e)}$$

Donde la primera integral expresa el equilibrio entre las fuerzas nodales de equilibrio y las fuerzas debidas a la deformación del elemento, las fuerzas másicas (segunda integral) , y en la tercera integral se representa las fuerzas de superficie.

Operando se obtiene la ecuación general

$$\mathbf{K}^{(e)} \mathbf{a}^{(e)} - \mathbf{f}^{(e)} = \mathbf{q}^{(e)}$$

Donde

$$\mathbf{K}^{(e)} = \int \int_{A^{(e)}} \mathbf{B}^T \mathbf{D} \mathbf{B} t dA$$

Es la matriz de rigidez del elemento, siendo B la matriz de deformaciones generalizada y D la matriz constitutiva.

Y \mathbf{f} el vector de fuerzas nodales equivalentes del elemento

$$\mathbf{f}^{(e)} = \mathbf{f}_f^{(e)} + \mathbf{f}_\sigma^{(e)} + \mathbf{f}_b^{(e)} + \mathbf{f}_t^{(e)}$$

Siendo el vector de fuerzas nodales equivalentes debido a las deformaciones iniciales, tensiones iniciales, fuerzas repartidas por unidad de área y fuerzas repartidas en el contorno, respectivamente.

Finalmente, tras el ensamblaje la ecuación matricial global se puede escribir como:

$$\mathbf{K} \mathbf{a} = \mathbf{f}$$

Teoría Básica Sólidos tres Dimensiones.

El diseño de la presa en **3D** se realizara mediante la teoría de elasticidad tridimensional en base al análisis por el método de elementos finitos. Para la interpretación de este tipo de modelos se deben tener claros los conceptos generales que se enuncian a continuación.

✓ **Campo de desplazamientos**

El movimiento de un punto en el espacio queda perfectamente definido por las tres componentes del vector de desplazamientos

$$\mathbf{u} = [u, v, w]^T$$

Donde u, v, w son los desplazamientos del punto según los ejes cartesianos x, y, z , respectivamente

Campo de deformaciones

Siguiendo la teoría clásica de elasticidad tridimensional, el vector de deformación en un punto está definido por seis componentes como

$$\boldsymbol{\varepsilon} = [\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_z, \gamma_{xy}, \gamma_{xz}, \gamma_{yz}]^T$$

Donde $\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_z$ son las deformaciones normales y $\gamma_{xy}, \gamma_{xz}, \gamma_{yz}$ son las deformaciones tangenciales.

✓ **Campo de tensiones**

El vector de tensiones en un punto contiene seis componentes de tensión, conjugadas de las seis respectivas deformaciones.

$$\boldsymbol{\sigma} = [\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z, \tau_{xy}, \tau_{xz}, \tau_{yz}]^T$$

Donde $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z$, son las tensiones normales $\tau_{xy}, \tau_{xz}, \tau_{yz}$ son las tensiones tangenciales.

✓ **Relación tensión – deformación**

La relación tensión deformación viene dada por la siguiente expresión:

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{D} (\boldsymbol{\varepsilon} - \boldsymbol{\varepsilon}^0) + \boldsymbol{\sigma}^0$$

Donde **D** es la matriz constitutiva que viene dada

$$\mathbf{D} = \frac{E(1-\nu)}{(1+\nu)(1-2\nu)} \begin{bmatrix} 1 & \frac{\nu}{1-\nu} & \frac{\nu}{1-\nu} & 0 & 0 & 0 \\ & 1 & \frac{\nu}{1-\nu} & 0 & 0 & 0 \\ & & \frac{\nu}{1-\nu} & 0 & 0 & 0 \\ & & & \frac{1-2\nu}{2(1-\nu)} & 0 & 0 \\ & & & & \frac{1-2\nu}{2(1-\nu)} & 0 \\ & & & & & \frac{1-2\nu}{2(1-\nu)} \end{bmatrix}$$

Simétrica

En caso de deformaciones iniciales de origen térmico el vector ϵ^0 tiene el siguiente valor

$$\epsilon^0 = \alpha(\Delta T) [1, 1, 1, 0, 0, 0]^T$$

✓ Principio de trabajos virtuales

La ecuación del PTV se escribe de manera análoga al caso de elasticidad bidimensional pero teniendo en el carácter tridimensional del análisis

$$\int \int \int_V \delta \epsilon^T \sigma \, dV = \int \int \int_V \delta \mathbf{u}^T \mathbf{b} \, dV + \int \int_A \delta \mathbf{u}^T \mathbf{t} \, dA + \sum_i \delta \mathbf{a}_i^T \mathbf{q}_i$$

Donde \mathbf{V} y \mathbf{A} son el volumen y la superficie del cuerpo sobre los que actúan las fuerzas de las masas \mathbf{b} , de superficie \mathbf{t} y puntuales \mathbf{q} respectivamente.

✓ Matriz de rigidez del elemento

Sustituyendo en la ecuación de PTV, particularizada para un solo elemento y operando se obtiene la ecuación de equilibrio del elemento.

$$\mathbf{K}_{ij}^{(e)} = \int \int \int_{V^{(e)}} \mathbf{B}_i^T \mathbf{D} \mathbf{B}_j \, dV$$

$3 \times 3 \qquad \qquad \qquad 3 \times 6 \quad 6 \times 6 \quad 6 \times 3$

✓ Vector de fuerzas nodales equivalentes

Con la segunda parte de la ecuación de PTV obtenemos las expresiones de fuerzas nodales

Fuerzas de volumen

$$\mathbf{f}_b^{(e)} = \begin{Bmatrix} \mathbf{f}_{b_1}^{(e)} \\ \mathbf{f}_{b_2}^{(e)} \\ \mathbf{f}_{b_3}^{(e)} \\ \mathbf{f}_{b_4}^{(e)} \end{Bmatrix} = \int \int \int_{V^{(e)}} \mathbf{N}^T \mathbf{b} \, dV$$

Fuerzas de superficie

$$\mathbf{f}_t^{(e)} = \begin{Bmatrix} \mathbf{f}_{t_1}^{(e)} \\ \mathbf{f}_{t_2}^{(e)} \\ \mathbf{f}_{t_3}^{(e)} \\ \mathbf{f}_{t_4}^{(e)} \end{Bmatrix} = \int \int_{A^{(e)}} \mathbf{N}^T \mathbf{t} \, dA$$

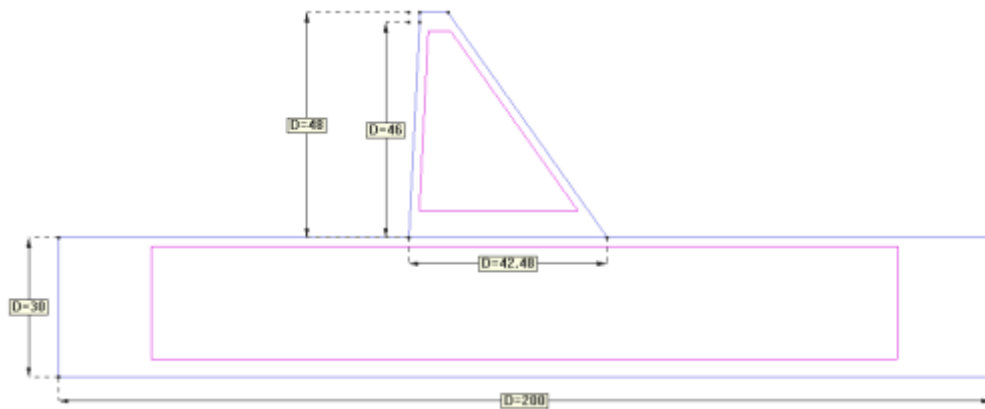
Modelo 2D Preproceso

Como se justificó anteriormente el tipo de problema que se va a utilizar para analizar la presa de gravedad es de **deformación plana**.

Geometría

Se introduce la geometría especificada tanto del suelo como de la presa. En un apartado posterior se justificara la **elección de las pendientes de los taludes** de la presa.

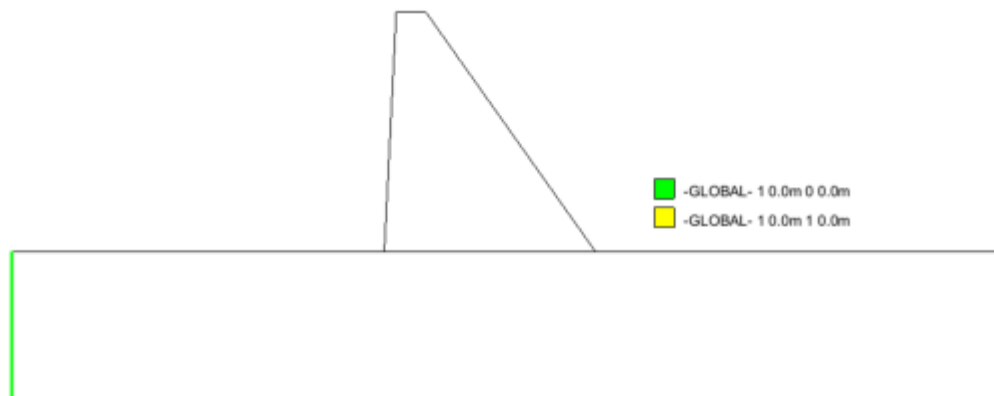
Figura 3 Geometría presa y suelo



Restricciones de desplazamiento

En la parte inferior del suelo se restringe en el sentido X e Y, y en los laterales se restringe solo en el sentido X.

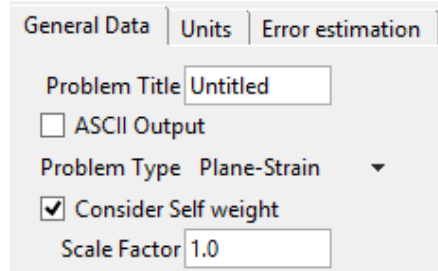
Figura 4 Restricciones de Desplazamiento



Cargas

Para el caso del “numeral a” se introduce solamente la carga de peso propio.

Figura 5 Carga peso propio



Para el caso b se introduce cargas de peso propio + empuje hidrostático en la presa y cimentación (altura del agua 46 m.) Carga final en el fondo de la presa 46000 N/m

Figura 6 Carga de empuje hidrostático en el suelo

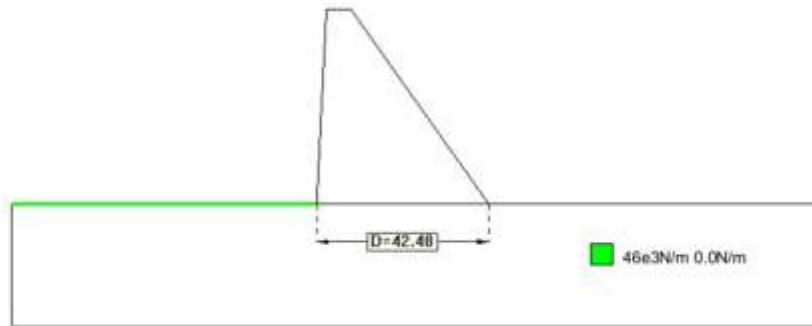
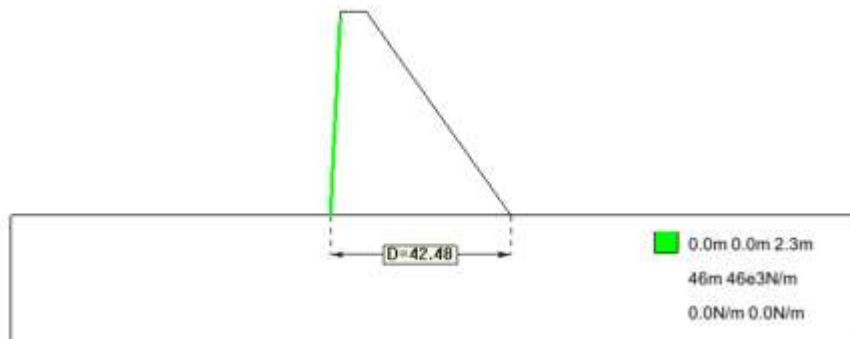


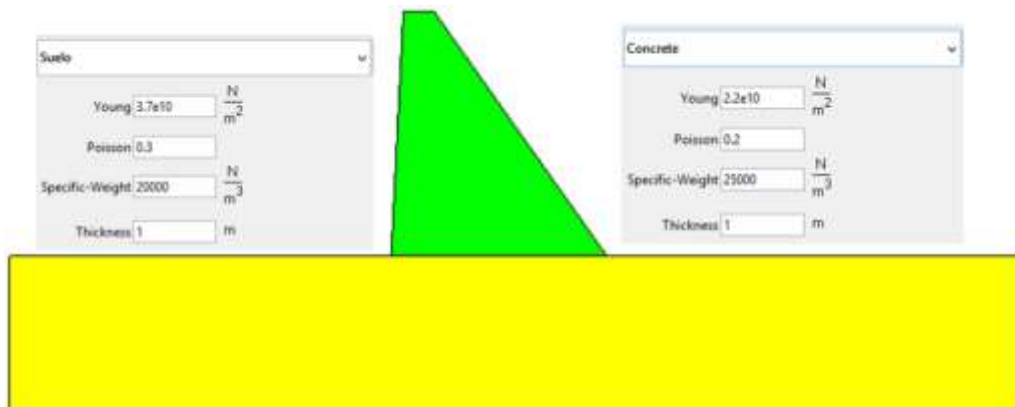
Figura 7 Carga de empuje hidrostático en la presa



Material

Se introduce el tipo de material según lo las especificaciones del tipo de hormigón y suelo dadas

Figura 8 Tipo de material Hormigón y Suelo



Selección de malla (Convergencia)

Con el objetivo de garantizar resultados óptimos se hace necesario realizar un análisis de convergencia de la malla que se va a utilizar en la presa. Este se realizara cambiando el tamaño de malla (refinándola) y analizando los desplazamientos de un punto contenido en esta. Según la teoría descrita anteriormente los esfuerzos y deformaciones dependen del vector de desplazamientos, analizando estos se podrán generar menos errores en la solución del sistema.

Se opta por utilizar una malla de elementos sencillos triangulares ya que estos se amoldan fácilmente a la mayoría de superficies y se podrían generar mayor número de elementos haciendo una malla lo suficientemente tupida para un análisis más preciso teniendo en cuenta las limitaciones del computador. Con esto se intenta generar un equilibrio entre el coste y un resultado confiable.

Se realiza el análisis a los dos casos (únicamente peso propio, carga hidrostática + peso propio) dado que hay un cambio significativo en las características de cada problema.

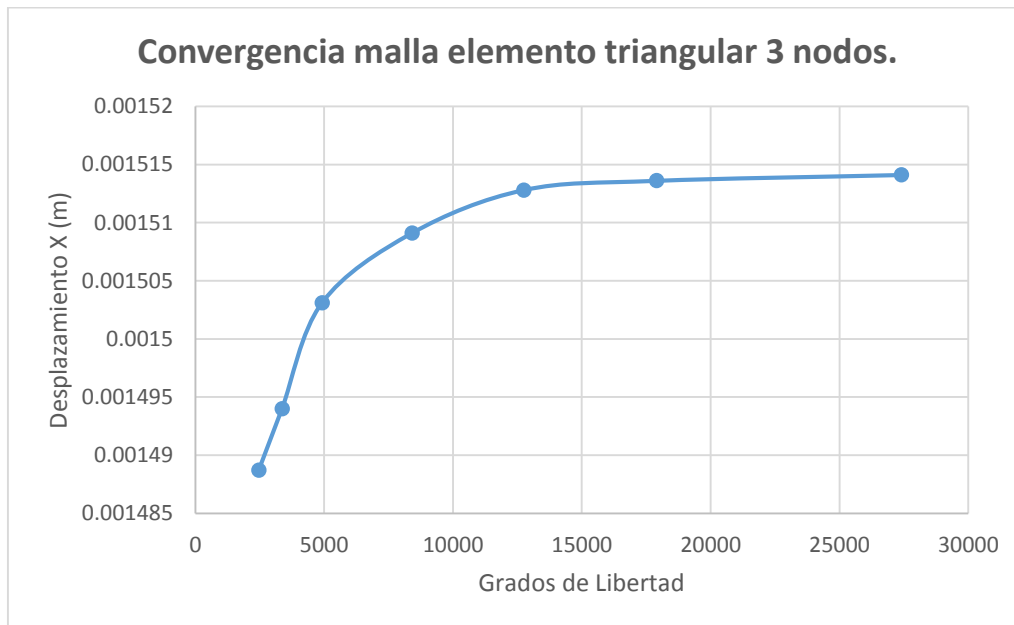
Se tendrá en cuenta el desplazamiento en el sentido horizontal (x) del punto más alto de la presa donde se observa una mayor deformación. Los resultados se presentan a continuación

a. Peso Propio

Tabla 1 Convergencia malla peso propio

Convergencia Elementos Triangulares 3 nodos			
Tamaño de malla	# de nodos	GDL	Desplazamiento X (m)
3	1231	2462	0.0014887
2.5	1684	3368	0.001494
2	2459	4918	0.0015031
1.5	4205	8410	0.0015091
1.2	6376	12752	0.0015128
1	8950	17900	0.0015136
0.8	13704	27408	0.0015141

Figura 9 Convergencia malla peso propio

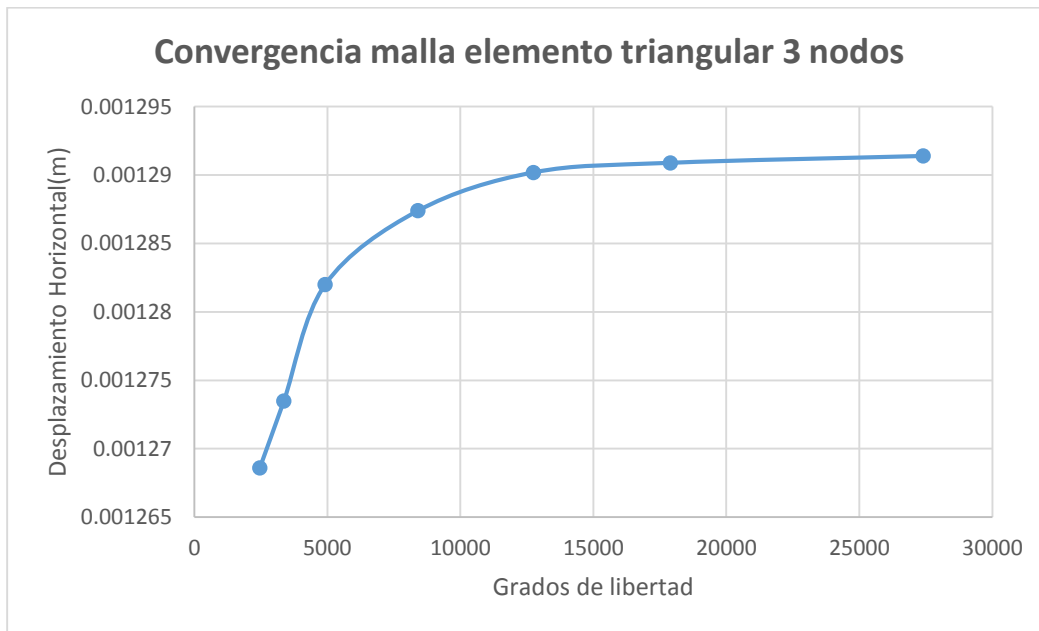


b. Peso propio + empuje hidrostático en presa y suelo.

Tabla 2 Convergencia malla peso propio + empuje hidrostático presa y suelo.

Convergencia Elementos Triangulares 3 nodos			
Tamaño de malla	# de nodos	GDL	Desplazamiento X (m)
3	1231	2462	0.0012686
2.5	1684	3368	0.0012735
2	2459	4918	0.001282
1.5	4205	8410	0.0012874
1.2	6376	12752	0.0012902
1	8950	17900	0.0012909
0.8	13704	27408	0.0012914

Figura 10 Convergencia malla peso propio + empuje hidrostático presa y suelo



Como podemos observar en las figuras anteriores para los dos casos el tamaño de malla que converge óptimamente es de 1m ya que se estabilizan los cambios de desplazamiento. El desplazamiento presenta una variación mínima con este tamaño de elemento y va siendo cada vez menor con elementos más pequeños.

Justificación de la elección de la pendiente de los taludes de la presa

Para escoger los **taludes óptimos** se realizaron 3 pruebas con diferentes relaciones de taludes aguas arriba y aguas abajo de la presa teniendo en cuenta las tracciones máximas que puede soportar esta. Este se hizo con la situación más crítica que es con el peso propio + peso hidrostático en la presa y suelo. El criterio de selección se basó en generar una geometría en donde se reduzcan los volúmenes para optimizar la estructura y reducir costos de materiales y construcción. El análisis se presenta a continuación. Condiciones de los taludes:

$$0.0 < m < 0.2$$

$$0.7 < n < 0.9$$

$$0.75 < m + n < 1.00$$

Tabla 3 elección taludes presa

Modelo	n	m	n+m	L base presa (m)	Tracción Max MPa
1	0.8	0.19		53.52	0.066668
2	0.73	0.1	0.83	45.84	0.07
3	0.71	0.05	0.76	42.48	0.1027

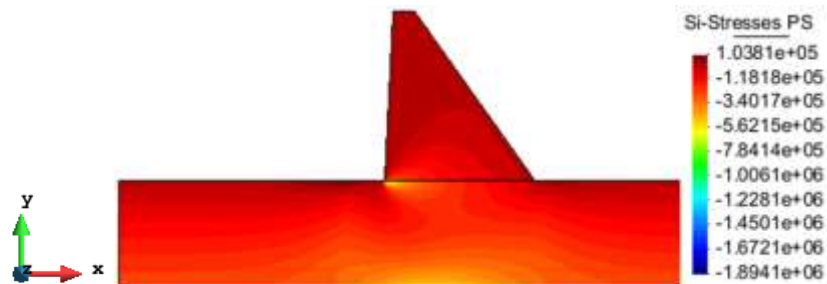
Como se observa en la tabla anterior las tracciones a las que está sometida la presa no superan la condición dada de 0.5 MPa. Debido a esto se seleccionó la opción 3 que tiene una longitud de base menor y por ende menor volumen, de esta manera reducir costes en materiales y construcción optimizando la geometría de la presa.

Modelo 2D Postproceso

En las siguientes figuras se presentan los resultados obtenidos para la presa solamente cargada con peso propio y la presa con peso propio + carga hidrostática en el suelo y la presa.

Presa sometida únicamente a peso propio

Figura 11 Estado de tensiones S_i , peso propio



En la figura 11 se observa que el máximo esfuerzo de tracción a la que está sometida la presa es el de 0.10381 MPa, muy por debajo del esfuerzo máximo permitido de 0.5 MPa.

Figura 12 Estado de tensiones S_{ii} , peso propio



En la figura 12 se observa que el máximo esfuerzo es de 0.030 MPa cumple con la condición de 0.5 MPa.

Figura 13 Estado de tensiones S_{iii} , peso propio

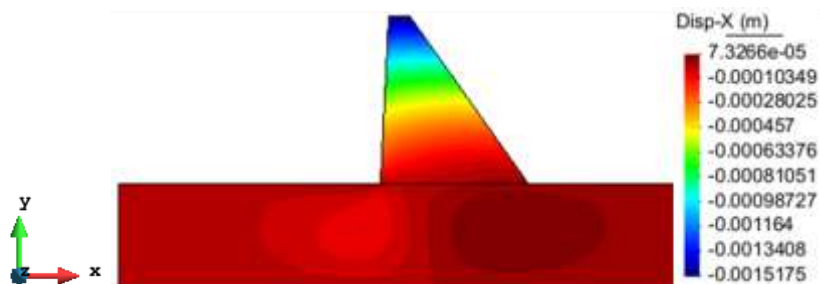


En la figura 13 se observa que en S_{iii} no se presenta tracción, la presa únicamente está sometida a esfuerzos de compresión.

Desplazamientos

En las siguientes figuras se muestran los desplazamientos para la presa cargada únicamente con su peso propio.

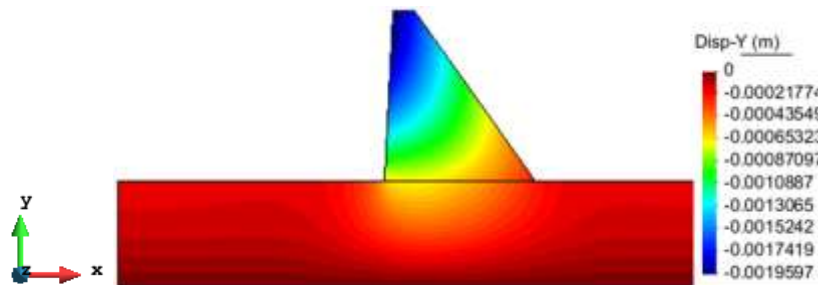
Figura 14 Desplazamiento X peso propio



Los desplazamientos horizontales (X) en el suelo son prácticamente despreciables debido a que no hay una carga horizontal que influya en este.

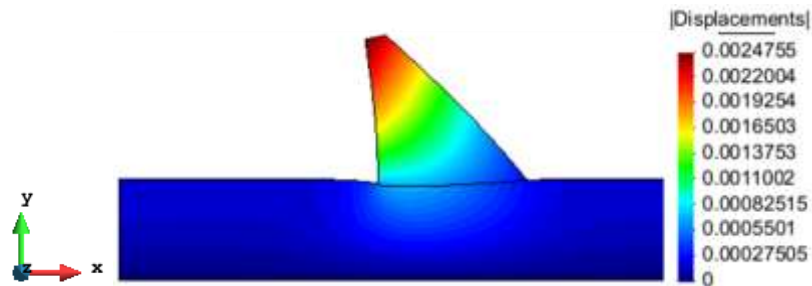
El máximo desplazamiento horizontal se presenta en la cota más alta de la presa, el valor negativo indica a que por el peso de la estructura y sin una contra carga del agua, la presa tiende a volcarse hacia aguas arriba.

Figura 15 Desplazamiento Y peso propio



En la figura 16 se observa que debido al peso propio toda la estructura tiende a desplazarse hacia abajo teniendo el mayor movimiento en el punto más alto de la estructura.

Figura 16 Desplazamientos totales presa peso propio



En la figura 16 se observa los desplazamientos totales y la deformada de la estructura debido al peso propio. Se observa que en el punto más alto se presenta los mayores desplazamientos como se enunció anteriormente. El suelo presenta desplazamientos pequeños cuando se acerca a la presa.

Presa con peso propio + carga hidrostática en el suelo y la presa.

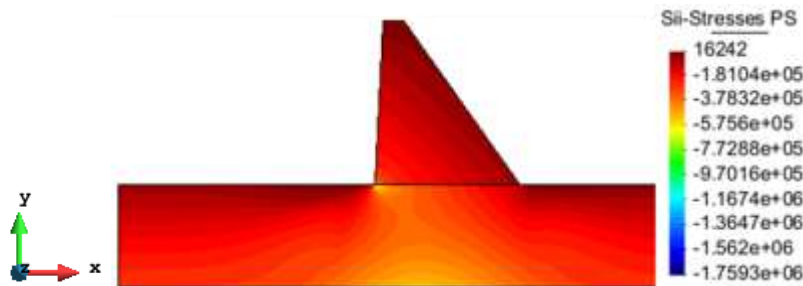
Tensiones

Figura 17 Estado de tensiones S_{ii} , peso propio + carga hidrostática presa y suelo.



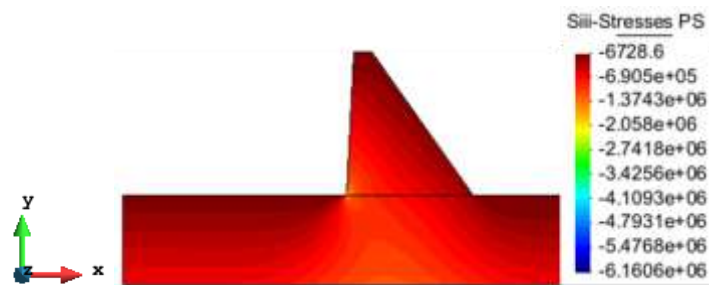
El conjunto presa, suelo está sometido a tracción. Se observa que esta no sobrepasa el límite impuesto de 0.5 MPa.

Figura 18 Estado de tensiones S_{ii} , peso propio + carga hidrostática presa y suelo.



En la figura 18 se observa que los esfuerzos de tracción S_{ii} son muy pequeños, la mayor parte de la presa está sometida a compresión.

Figura 19 Estado de tensiones S_{iii} , peso propio + carga hidrostática presa y suelo.

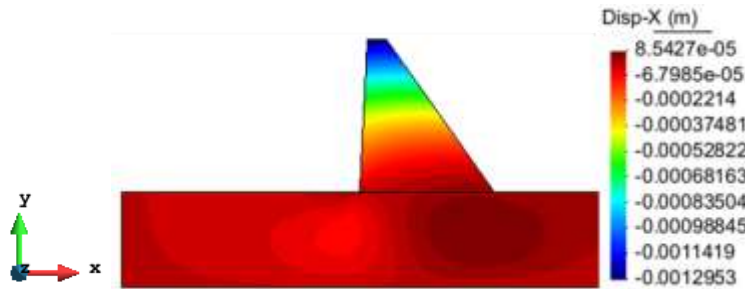


En la figura 19 se observa que S_{iii} no se presentan esfuerzos de tracción ni en la presa ni en el suelo.

Desplazamientos

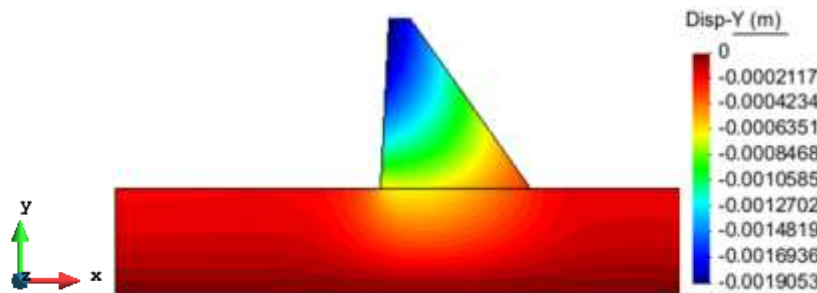
Los desplazamientos de la presa y el suelo debidos a la carga hidrostática y el propio peso se muestran en las siguientes figuras.

Figura 20 Desplazamientos horizontales por peso propio + carga hidrostática presa y suelo.



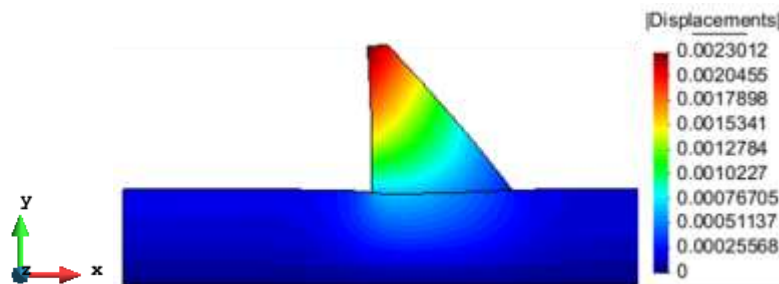
En la figura 20 se observa que los desplazamientos horizontales más grandes se presentan en la parte superior de la presa y a medida que se acerca al suelo los desplazamientos disminuyen hasta ser casi nulos.

Figura 21 Desplazamientos verticales por peso propio + carga hidrostática presa y suelo



En la figura 21 se observa que el desplazamiento vertical se genera principalmente en las coordenadas superiores de las estructura. Sin embargo en el suelo se generan también movimientos debido a la carga del agua y del peso de la estructura

Figura 22 Desplazamientos totales por peso propio + carga hidrostática presa y suelo



En la figura 22 se observa que a pesar de la carga hidrostática, **la presa continua deformándose hacia aguas arriba**. Esto es debido a que la carga de presión que ejerce el agua no contrarresta el peso propio de la presa y por ese este comportamiento, aunque los desplazamientos se reduzcan considerablemente en comparación con la presa desocupada no son lo suficientemente grandes para que la presa cambie el sentido de la deformación.

Para optimizar el problema y que la presa trabaje a flexión por la cara de aguas arriba se podrían aumentar las pendientes y así hacer más delgada la sección optimizando la geometría y reduciendo costes. Sin embargo, con las **condiciones dadas en el enunciado del problema** y revisándolo minuciosamente la presa tiene este comportamiento.

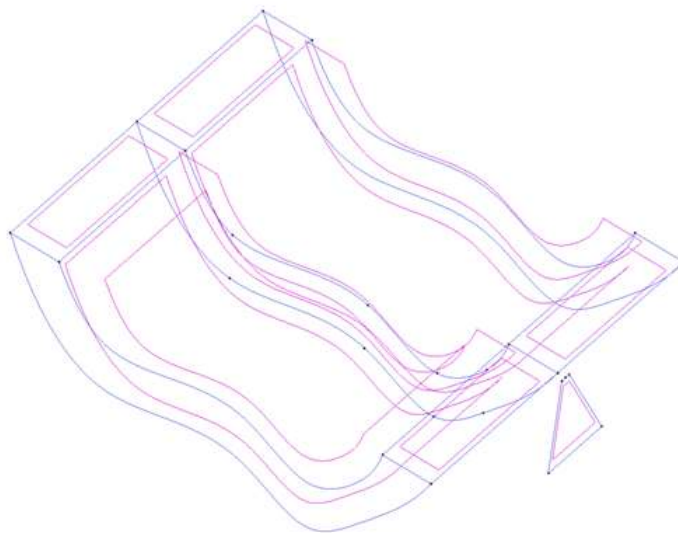
Preproceso modelo 3D

Geometría 3D

Con el fin de generar una conexión entre el suelo y la presa la geometría se dibujó de la siguiente manera.

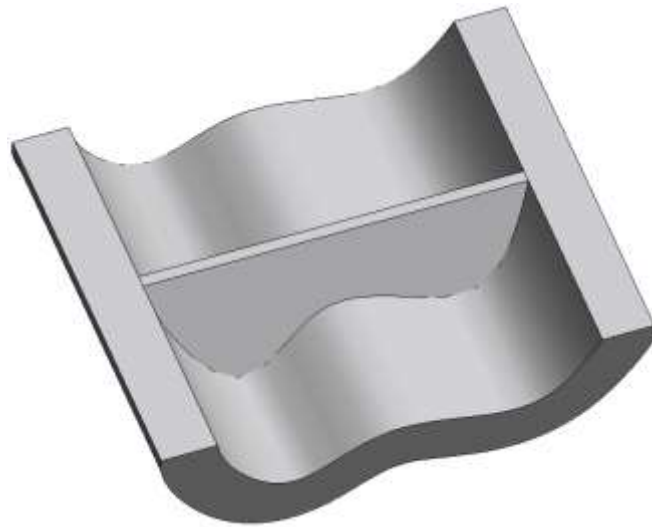
- ✓ Se introdujo el perfil del suelo y se obstruyo con la longitud de desarrollo (200 m).
- ✓ Perpendicular al suelo se dibujó el perfil de la presa, esta se obstruyo haciendo que traspasara el perfil terreno en su totalidad.

Figura 23 Dibujo de la geometría 3D



- ✓ Se hizo una intersección de superficies y se borraron las superficies que no hacían parte del sistema.
- ✓ Se dividieron las superficies en 3 partes para optimizar el modelo y se generaron los volúmenes correspondientes. En la figura 24 se observa la geometría final generada.

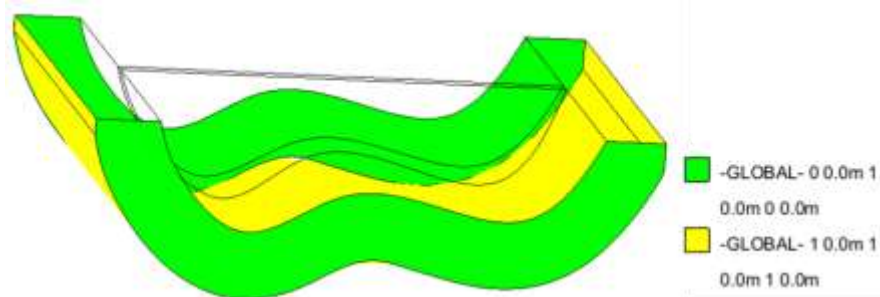
Figura 24 Geometría 3D, Presa – Suelo



Restricciones de desplazamiento 3D

Se genera una restricción en las superficies laterales del suelo en sentido X, y en la superficie de la base del terreno en sentido X, Y, Z teniendo precaución de no restringir otras superficies adicionales como se observa en la figura 25

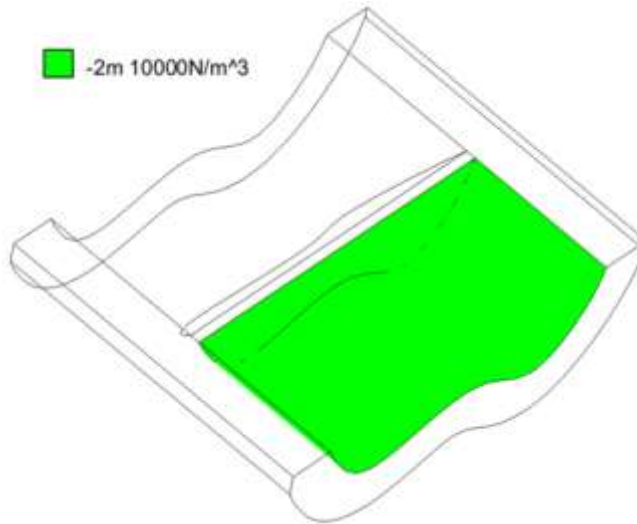
Figura 25 Restricciones de desplazamiento 3D



Cargas 3D

- a. Solo se considera el propio peso
- b. Se considera el propio peso + carga hidrostática en el suelo y la presa. Se introduce como una carga de presión hidrostática con una columna de agua de 46 m.

Figura 26 Cargas 3D



Materiales 3D

Los materiales de la presa y suelo para el modelo 3D no cambian respecto al modelo 2D. Se asignan a los volúmenes generados. Se muestran a continuación en la figura 26.

Figura 27 Material 3D



Selección de malla (convergencia) 3D

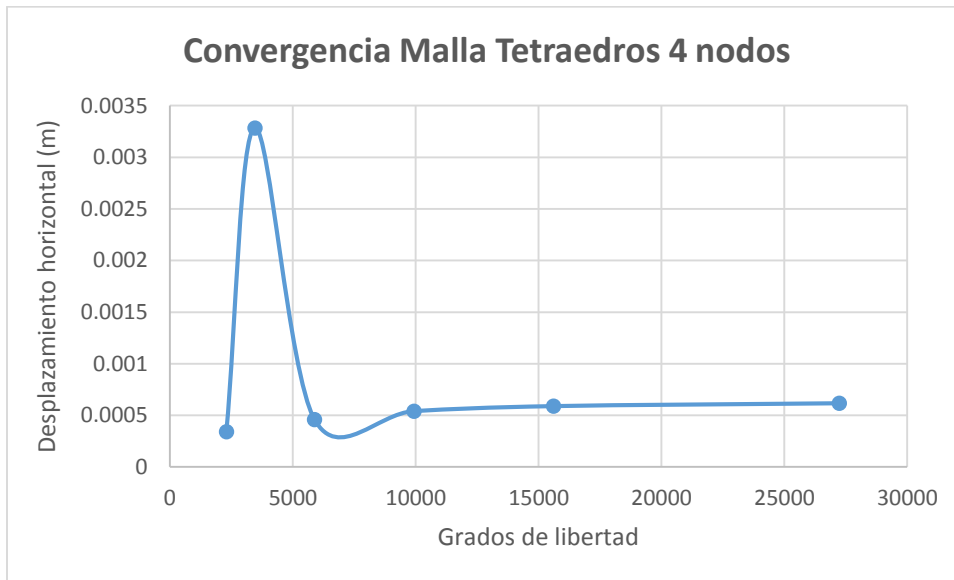
La malla que se utilizara para realizar el estudio de convergencia fue de elementos en tetraedros teniendo en cuenta el coste computacional causado si se aumenta el número de nodos. Se cree que con este tipo de elementos y con un tamaño reducido para hacer la malla mas tupida los resultados generados pueden ser bastante aceptables.

- a. Peso propio

Tabla 4 Convergencia malla 3D. Peso propio

Convergencia Tetraedros 4 nodos 3D			
Tamaño de malla	# de nodos	GDL	Desplazamiento Y (m)
25	765	2295	0.00034334
20	1153	3459	0.0032846
15	1961	5883	0.00045917
12	3311	9933	0.00054152
10	5204	15612	0.00058984
8	9080	27240	0.00061747

Figura 28 Convergencia malla 3D. Peso propio

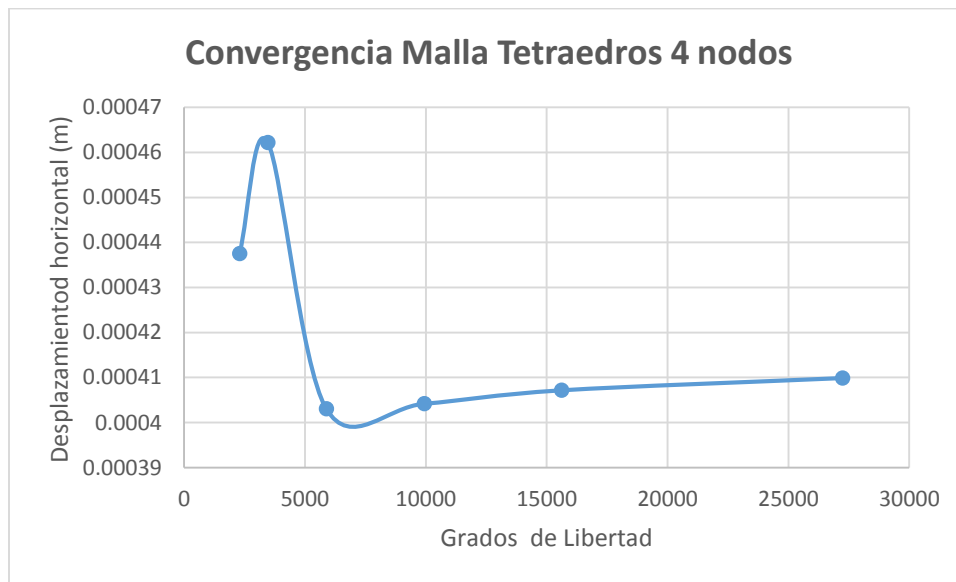


b. Peso propio + carga hidrostática suelo presa.

Tabla 5 Convergencia malla peso propio+ carga hidrostática 3D.

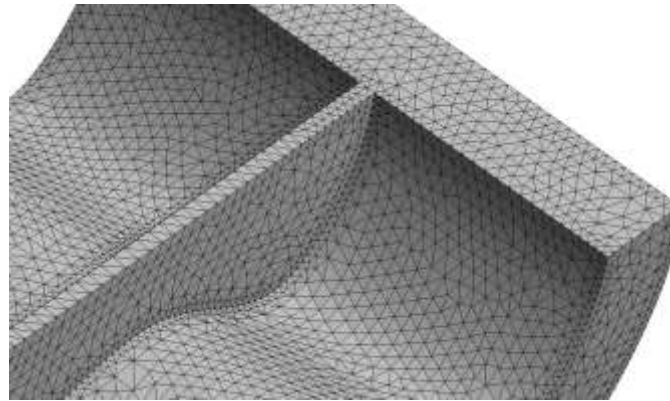
Tamaño de malla	# de nodos	GDL	Desplazamiento Y (m)
25	765	2295	0.00043755
20	1153	3459	0.000462215
15	1961	5883	0.00040309
12	3311	9933	0.0004042
10	5204	15612	0.00040718
8	9080	27240	0.0004099

Figura 29 Convergencia malla peso propio+ carga hidrostática 3D.



Como podemos observar en las figuras anteriores para los dos casos el tamaño de malla que converge óptimamente es de 10 m. ya que se estabilizan los cambios de desplazamiento. El desplazamiento presenta una variación mínima con este tamaño de elemento y va siendo cada vez menor con elementos más pequeños.

Figura 30 Mallado elemento tetraedro en 3D



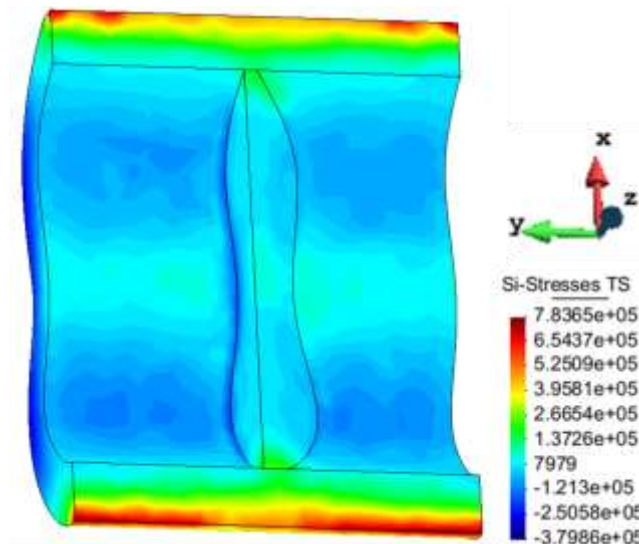
Modelo 3D Postproceso

En las siguientes figuras se presentan los resultados obtenidos para la presa solamente cargada con peso propio y la presa con peso propio + carga hidrostática en el suelo y la presa.

Presa sometida únicamente a peso propio

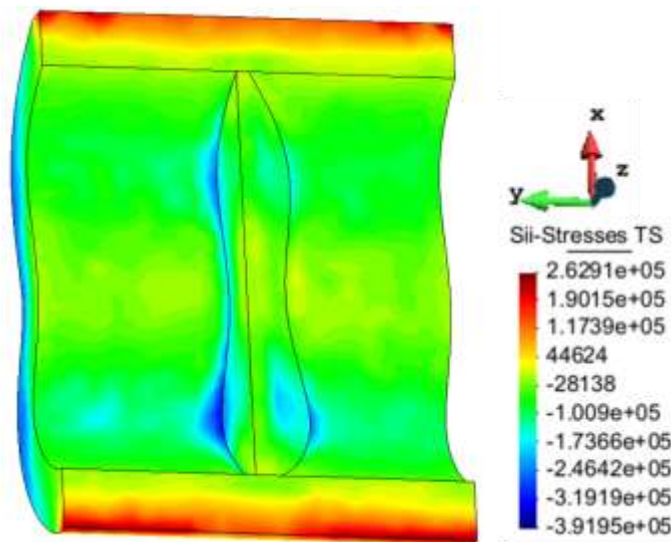
Tensiones

Figura 31 Estado de tensión Si. Peso propio 3D



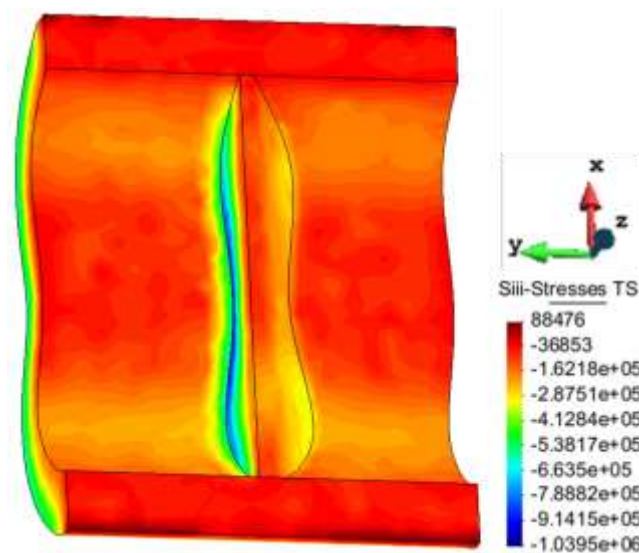
Como se observa en la figura 31, las tensiones máximas de tracción a las que está sometida la presa se presentan en los laterales que están en contacto con el terreno. La tracción máxima en este sector es de aproximadamente **0.25 MPa**, lo que significa que cumple con las condiciones establecidas por el problema de tensiones máximas de tracción de **0.5 MPa**.

Figura 32 Estado de tensión Sii. Peso propio 3D



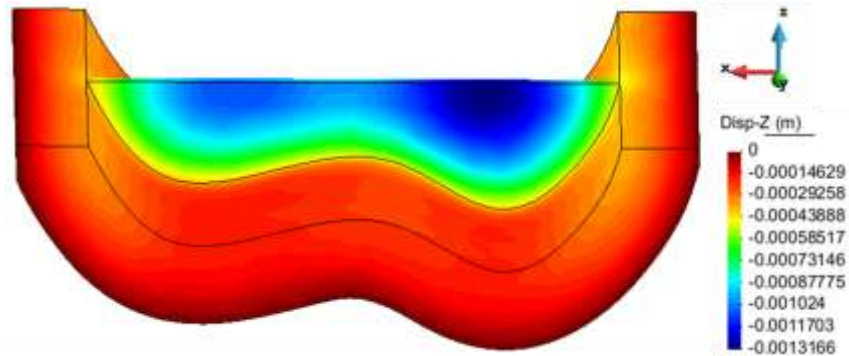
Como se observa en la figura 32, en el estado de tensión Sii, la presa está sometida a tensiones de compresión presentando los máximos valores en la parte de la base que está en contacto con el terreno. Las tensiones de tracción que se generan se presentan únicamente en terreno por lo que la presa cumple con la condición de tracción mínima.

Figura 33 Estado de tensión Siii. Peso propio 3D



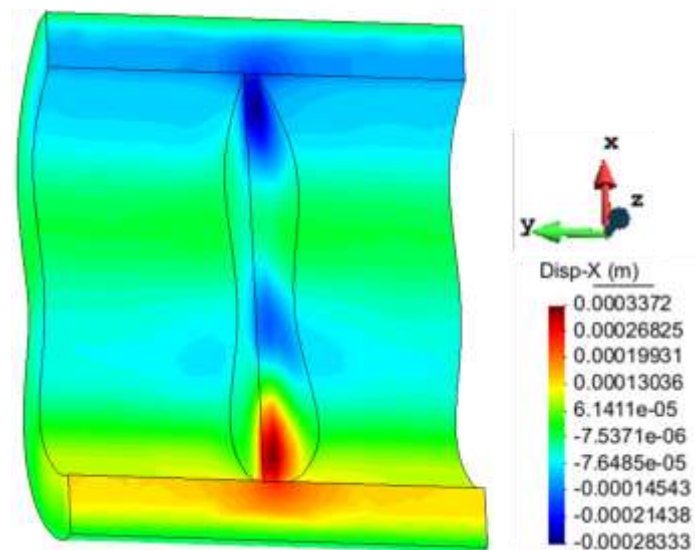
Se observa en la figura 33 que las tracciones generadas por el propio peso en el estado de tensión Siii son muy pequeñas **0.088476 MPa** cumpliendo con el requerimiento mínimo. La presa está sometida mayormente a estados de compresión.

Figura 34 Desplazamiento Vertical Z. 3D



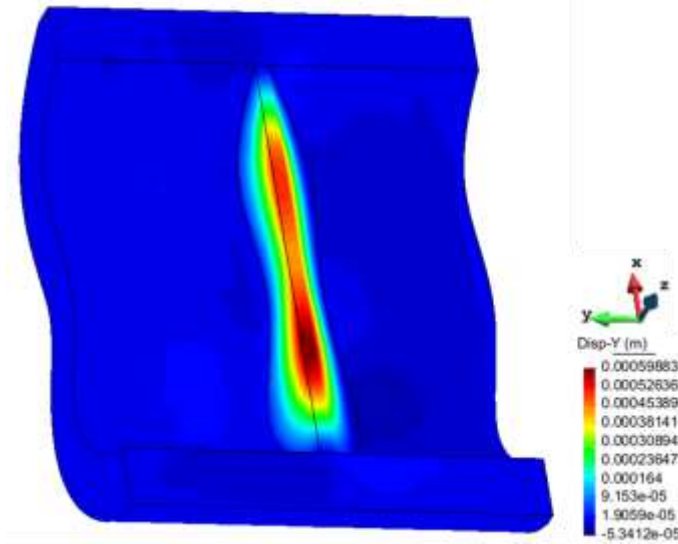
El peso propio de la estructura hace que esta tienda a hundirse en el terreno. Esto se observa con los desplazamientos verticales a los que está sometida la presa como se observa en la figura 34.

Figura 35 Desplazamiento eje X. 3D



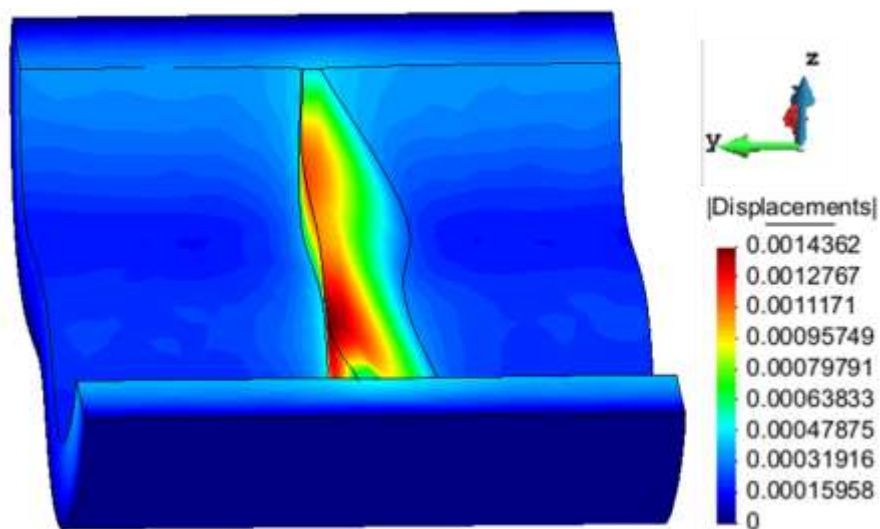
Debido a la geometría del terreno la presa tiende a hundirse más en su parte central. Esto genera que en las esquinas se presente desplazamientos como si esta se estuviera comprimiendo en su desplazamiento vertical negativo como se observa en la figura 35.

Figura 36 Desplazamientos eje Y 3D.



En los desplazamientos horizontales (eje Y) se observa que la presa tiende a volcarse hacia aguas arriba. Esto se debe a su geometría y a que su peso propio ejerce un contrapeso que tiene que ser contrarrestado con la carga hidrostática del agua como se observa en las figuras 36 y 37.

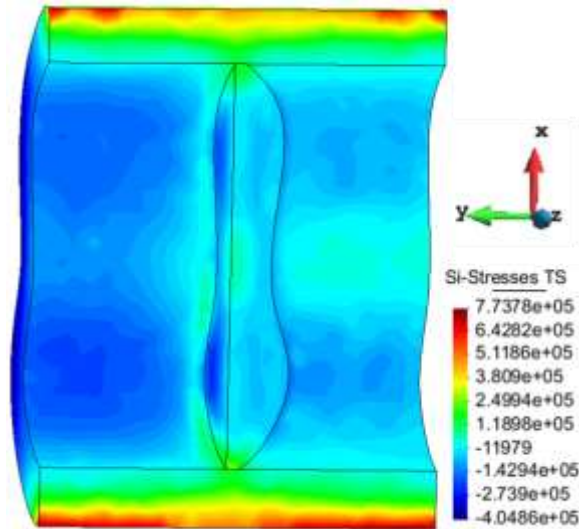
Figura 37 Desplazamientos Totales 3D.



Presa sometida a peso propio y carga hidrostática.

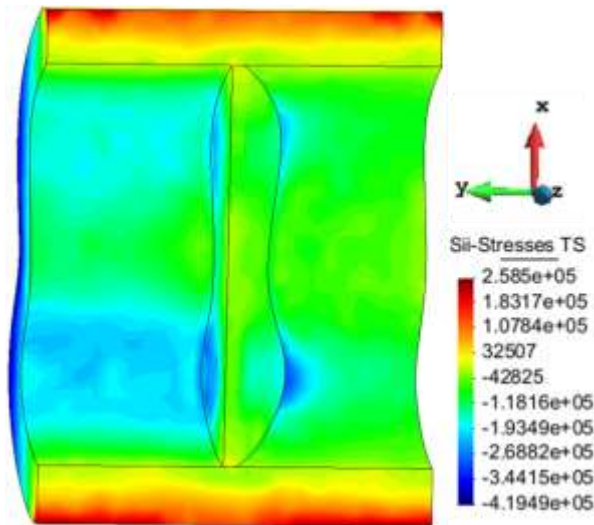
Tensiones

Figura 38 Estado de tensión S_i . Peso propio + Carga hidrostática 3D



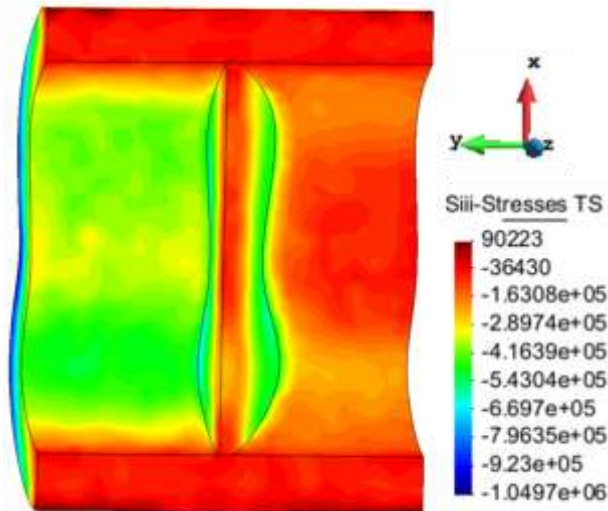
Como se observa en la figura 38, la carga hidrostática genera una compresión en la presa y en el terreno. También se puede analizar que las tensiones máximas de tracción a las que está sometida la presa se presentan en los laterales que están en contacto con el terreno. La tracción máxima en este sector es de aproximadamente **0.25 MPa** sin cambios considerables con respecto a la presa sin agua. Podemos concluir que cumple con las condiciones establecidas por el problema de tensiones máximas de tracción de **0.5 MPa**.

Figura 39 Estado de tensión S_{ii} . Peso propio 3D



Como se observa en la figura 39, en el estado de tensión S_{ii} , la presa está sometida a tensiones de compresión presentando los máximos valores en la parte de la base que está en contacto con el terreno. Las tensiones de tracción que se generan se presentan únicamente en terreno por lo que la presa cumple con la condición de tracción mínima.

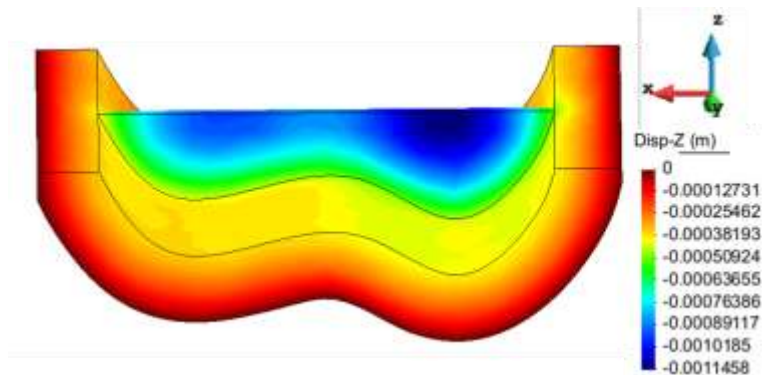
Figura 40 Estado de tensión S_{iii} . Peso propio 3D



Se observa en la figura 40 que las tracciones generadas por el propio peso en el estado de tensión S_{iii} son muy pequeñas **0.090223 MPa** cumpliendo con el requerimiento mínimo. La presa está sometida mayormente a estados de compresión.

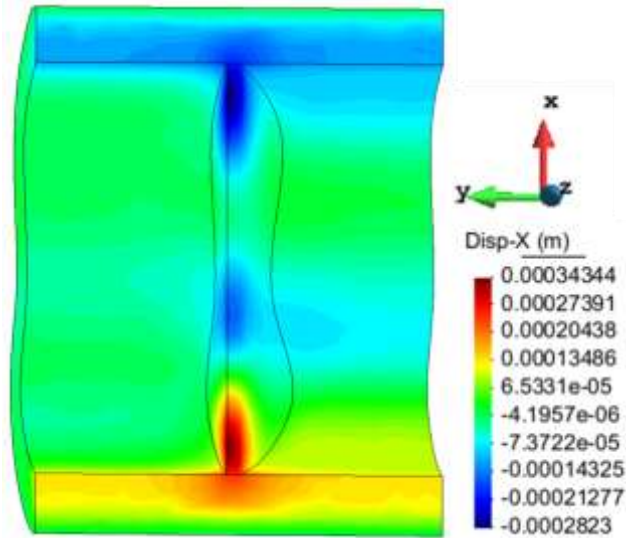
Desplazamientos

Figura 41 Desplazamiento Vertical Z. 3D



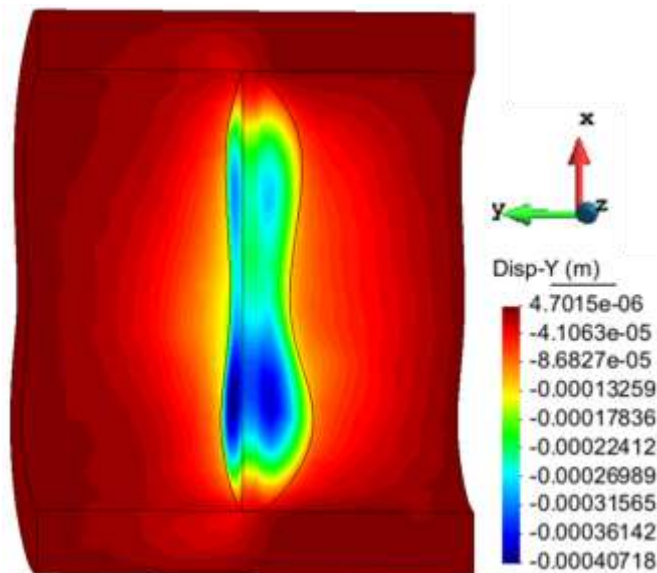
Igualmente que en la presa sin agua, el peso propio de la estructura hace que esta tienda a hundirse en el terreno. Esto se observa con los desplazamientos verticales a los que está sometida la presa como se observa en la figura 41.

Figura 42 Desplazamiento eje X. 3D



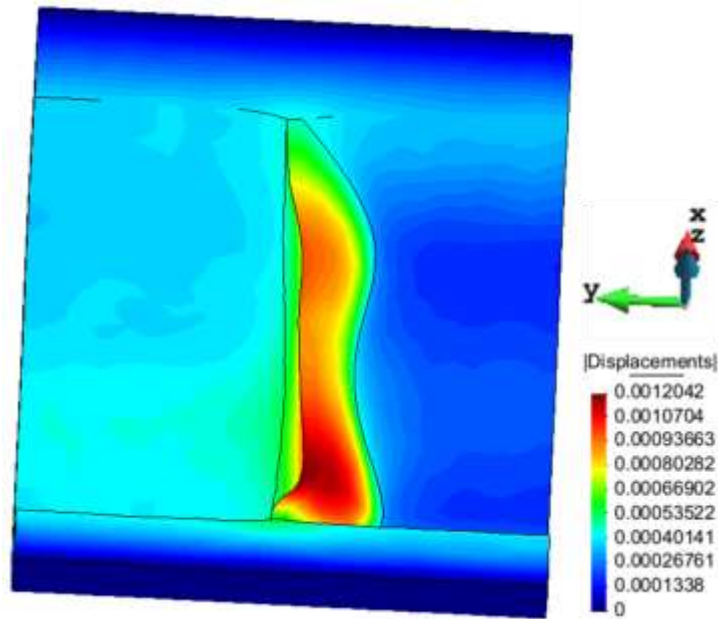
Debido a la geometría del terreno la presa tiende a hundirse más en su parte central. Esto genera que en las esquinas se presente desplazamientos como si esta se estuviera comprimiendo en su desplazamiento vertical negativo como se observa en la figura 42. Estos

Figura 43 Desplazamientos eje Y 3D.



En los desplazamientos horizontales (eje Y) se observa que la presa tiene un comportamiento totalmente diferente al de la presa sin agua. Debido a la carga hidrostática la deformación de la presa cambia totalmente de sentido inclinando la presa hacia aguas abajo (derecha) como se observa en la figura 43 y 44.

Figura 44 Desplazamientos Totales 3D.



Comparación de resultados 2D y 3D

Tabla 6 Comparación de resultados 2D y 3D

	2D PP	2D PP+ Agua	3D PP	3D PP+ Agua
Desplazamiento Max Vertical Z (m)	-0.0019597	-0.0002117	-0.0013166	-0.0011458
Desplazamiento Horizontal Y (m)	-0.0015175	-0.0011419	-0.0005988	0.00040718
Desplazamiento Max Transversal X (m)	0	0	0.0003372	0.00034344
Tracción Máxima MPa	0.10381	0.10207	0.29654	0.25105
Compresión Máxima MPa	7.1499	6.1606	1.0395	1.0497

Notas.

En el modelo 2D el eje vertical es el eje Y para hacer la comparación adecuada con el modelo 3D, en la tabla se introdujeron estos datos verticales en la casilla desplazamiento vertical Z.

En el modelo 2D el eje horizontal es el eje X para hacer la comparación adecuada con el modelo 3D, en la tabla se introdujeron estos datos horizontales en la casilla desplazamiento horizontal Y.

El signo negativo en los desplazamientos horizontales significa movimiento hacia agua arriba de la presa.

Conclusiones

a. Comparación 2D. Presas peso propio y peso propio + carga hidrostática

- ✓ Aunque los desplazamientos verticales son pequeños si se presenta una diferencia entre los dos modelos siendo el que tiene carga hidrostática el que tiende a hundirse más en el terreno. Esto debido a la presión del agua ejercida sobre la presa y sobre el terreno y claramente el peso propio de la presa.
- ✓ Como se observa en la tabla 6, el desplazamiento horizontal tiende hacia aguas arriba de la presa en los dos casos. Se puede concluir que en el análisis del modelo 2D la presión del agua no genera que los desplazamientos de la presa cambien de sentido respecto a la presa carga solamente con el peso propio.
- ✓ La tracción máxima es similar, en ningún momento se alcanzan las tracciones máximas permitidas de MPa
- ✓ Las compresiones generadas son significativas en los dos casos. Las mayores compresiones se generan en el suelo y en la base de la presa como se observa en las figuras.

b. Comparación 3D. Presas peso propio y peso propio + carga hidrostática

- ✓ Aunque la diferencia es mínima los desplazamientos verticales son mayores en la presa cargada únicamente con peso propio. Esto es debido a que el empuje del agua ejerce una fuerza lateral que mueve la presa lateralmente contrarrestando en cierta medida el movimiento debido el peso propio.
- ✓ En la presa cargada únicamente con peso propio el desplazamiento horizontal es hacia aguas arriba, por el contrario, en la presa cuando se somete a carga hidrostática y peso propio el desplazamiento es hacia aguas abajo. Esto debido a la presión ejercida por el agua en la presa.
- ✓ Las tracciones generadas en las presas no sobrepasan en ningún momento las tracciones máximas permitidas de 0.5 MPa

c. Comparación 2D y 3D

- ✓ La mayor diferencia se presenta en el movimiento horizontal. En el caso 2D para los dos tipos de presa el desplazamiento es en sentido aguas arriba. En el caso 3D el desplazamiento para el modelo con solo el peso propio es hacia aguas arriba, por el contrario en desplazamiento para la presa con peso propio y carga hidrostática es hacia aguas abajo. Se genera un cambio de sentido del desplazamiento horizontal entre los dos modelos.
- ✓ Las tracciones máximas generadas son mayores en el caso 3D. Aproximadamente son 2 veces mayores que en el modelo 2D.



- ✓ Las compresiones con mucho mayores en el caso 2D. Estos valores aumentan entre 6 y 7 veces con respecto al modelo 3D.

d. Generales

- ✓ La elección del tipo de problema con el que se va a modelar un proyecto es muy importante para obtener los resultados óptimos que generen una aproximación muy cercana a las condiciones reales. En estos casos el criterio y la experiencia del ingeniero es de suma importancia para realizar un análisis de datos adecuado y encontrar situaciones poco reales que pueden generar grandes problemas en un diseño determinado.
- ✓ Las pendientes de los taludes elegidas para el diseño de la presa fueron las correctas ya que se escogió una relación en la cual se empleara poco material y un menor tiempo de construcción de la presa. En todos los casos se cumplió con la tracción máxima requerida por el problema.
- ✓ Aunque el mallado puede ser mucho más tupido para presentar mejores resultados, teniendo en cuenta el coste computacional, el tamaño de la malla y los elementos (1m triangular 3 nodos para 2D, y 10 m tetraedros 4 nodos para 3D) escogidos presentan resultados confiables y coherentes de los cuales se puede extraer el comportamiento general del sistema presa – terreno.
- ✓ Desde mi punto de vista el análisis de la presa por medio del modelo 3D se aproxima más a la realidad y genera datos más confiables. Sin embargo, hay que tener en cuenta que trabajar con modelos 3D implica mayor tiempo de diseño y hay un nivel de dificultad más alta tanto en el preproceso como en el postproceso. Esto genera un coste adicional en el análisis de proyectos ingenieriles.

PROBLEMA L-37

La figura representa aproximadamente el panteón de Agripa. Calcule el estado tensional y el coeficiente de seguridad que tiene la estructura ante el peso propio con las siguientes condiciones

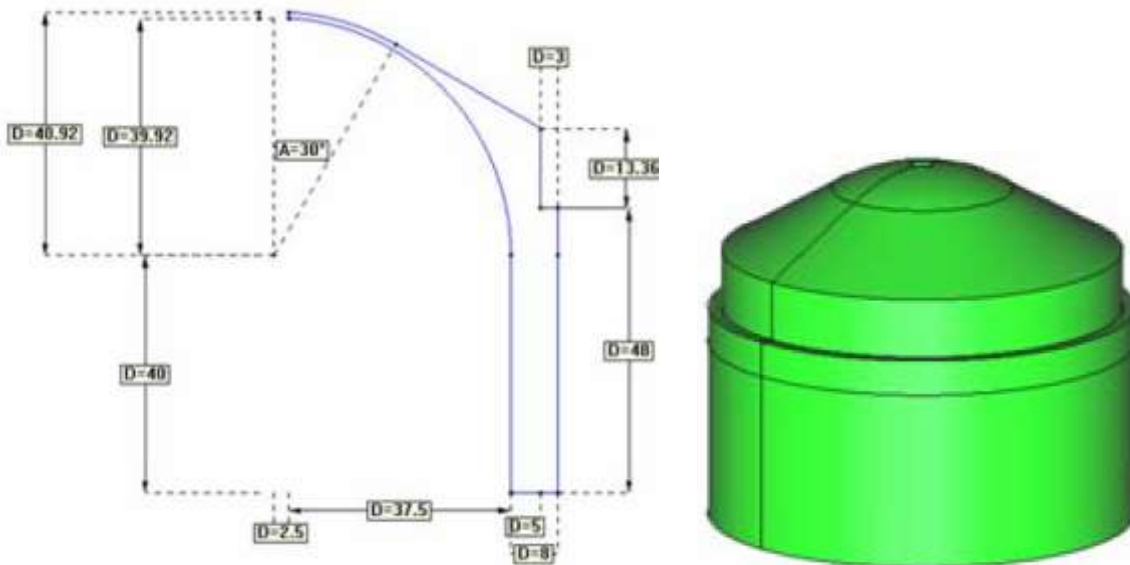
- ✓ Las tracciones máximas en cualquier punto de la estructura no deben superar los 1.8 MPa.
- ✓ Las compresiones máximas en cualquier punto de la chapa no deben superar los 70 MPa.
- ✓ La base de la estructura se considera empotrada.
- ✓ Las propiedades mecánicas del edificio son $E = 15.7 \text{ KN/mm}^2$, $\nu = 0.18$.
- ✓ El peso específico del material es de 1200 Kg/ m^3 .

Cargas actuantes

- ✓ Peso propio.

Las dimensiones de la torre en m son las mostradas

Figura 45 Geometría Panteón



Análisis del problema

Para calcular el estado tensional y factor de seguridad del panteón se planteó hacer un análisis por medio de **solidos de revolución** y compararlo con un análisis **3D**. Así, concluir que modelo arroja resultados más confiables teniendo en cuenta el grado de dificultad y coste de cada modelo.

Resumen Teoría Básica Solidos de revolución

✓ **Campo de desplazamientos**

Si las cargas son también de revolución el movimiento de un punto queda perfectamente definido por los componentes de los desplazamientos radial u y axial w , siendo nula la componente circunferencial v . El vector de desplazamientos en cualquier punto se define como:

$$\mathbf{u} = \begin{Bmatrix} u(r, z) \\ w(r, z) \end{Bmatrix}$$

✓ **Campo de deformaciones**

Debido a la simetría axial del problema los dos desplazamientos no nulos u y w son independientes de la coordenada circunferencial Θ . Por consiguiente, se deduce de inmediato que las deformaciones tangenciales Y_{rz} y $Y_{r\theta}$ son nulas. Por otra parte la deformación axial del cuerpo provoca que los puntos situados sobre una circunferencia de r pase después de la deformación a estar situados sobre otra de radio $r + u$. Por ello, se define la deformación circunferencial ϵ_{θ} como la variación relativa de longitud entre dichas circunferencias. Es decir

$$\epsilon_{\theta} = \frac{2\pi(r + u) - 2\pi r}{2\pi r} = \frac{u}{r}$$

El vector de deformaciones de un punto tiene, por tanto, las cuatro componentes siguientes:

$$\boldsymbol{\epsilon} = \begin{Bmatrix} \epsilon_r \\ \epsilon_z \\ \epsilon_{\theta} \\ \gamma_{rz} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial u}{\partial r} \\ \frac{\partial w}{\partial z} \\ \frac{u}{r} \\ \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial r} \end{Bmatrix}$$

✓ **Campo de Tensiones**

Las tensiones no nulas se corresponden con las deformaciones no nulas. Así, pues, el vector de tensiones se escribe como

$$\sigma = [\sigma_r, \sigma_z, \sigma_\theta, \tau_{rz}]^T$$

Donde σ_r , σ_z , y σ_θ , son respectivamente las tensiones radial, axial y circunferencial y τ_{rz} es la tensión tangencial.

Relación Tensión – Deformación.

$$\sigma = D (\epsilon - \epsilon^0) + \sigma^0$$

Donde D es la matriz constitutiva o matriz de constantes elásticas y contiene los siguientes términos:

$$D = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \begin{bmatrix} 1-\nu & \nu & \nu & 0 \\ \nu & 1-\nu & \nu & 0 \\ \nu & \nu & 1-\nu & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2} \end{bmatrix}$$

✓ **Principio de Trabajos Virtuales**

La expresión de PTV es análoga a la expresión para elasticidad bidimensional, estando ahora todas las integrales referidas al volumen del sólido de revolución. Así, teniendo en cuenta las tensiones y deformaciones que contribuyen al trabajo virtual de la estructura la expresión puede escribirse de la siguiente manera:

$$2\pi \int \int_A \delta \epsilon^T \sigma dA = 2\pi \int \int_A \delta u^T b r dA + 2\pi \int \delta u^T r ds + 2\pi \sum_i \delta a_i^T q_i r_i$$

✓ **Ecuaciones de equilibrio de la discretización**

Operando se obtiene la ecuación general

$$K^{(e)} a^{(e)} - f^{(e)} = q^{(e)}$$

Donde

$$K_{ij}^{(e)} = 2\pi \int \int_{A^{(e)}} B_i^T D B_j r dr dz$$

Y **f** el vector de fuerzas nodales equivalentes del elemento

$$\mathbf{f}_{2 \times 1}^{(e)} = 2\pi \int_{A^{(e)}} \mathbf{N}^T \mathbf{b} \, r \, dA + 2\pi \int_{\Gamma^{(e)}} \mathbf{N}^T \mathbf{t} \, r \, ds + 2\pi \int_{A^{(e)}} \mathbf{B}^T \mathbf{D} \boldsymbol{\epsilon}^0 \, r \, dA - 2\pi \int_{A^{(e)}} \mathbf{B}^T \boldsymbol{\sigma}^0 \, r \, dA$$

$$\mathbf{f}_b^{(e)} + \mathbf{f}_t^{(e)} + \mathbf{f}_\epsilon^{(e)} + \mathbf{f}_\sigma^{(e)}$$

Siendo los vectores de fuerzas de masa y de superficie, de fuerzas debidas a deformaciones iniciales, de fuerzas debidas a tensiones iniciales, respectivamente.

Finalmente, tras el ensamblaje la ecuación matricial global se puede escribir como:

$$\mathbf{K}\mathbf{a} = \mathbf{f}$$

Modelo 3D Preproceso

Geometría Panteón 3D

Se introduce la geometría especificada del panteón. Seguido de esto se hace una extrusión de las superficies a 180° y -180° con el objetivo de optimizar el comportamiento de la estructura. Se genera un solo volumen para todo el panteón como se muestra en la figura 46

Figura 46 Geometría Panteón 3D

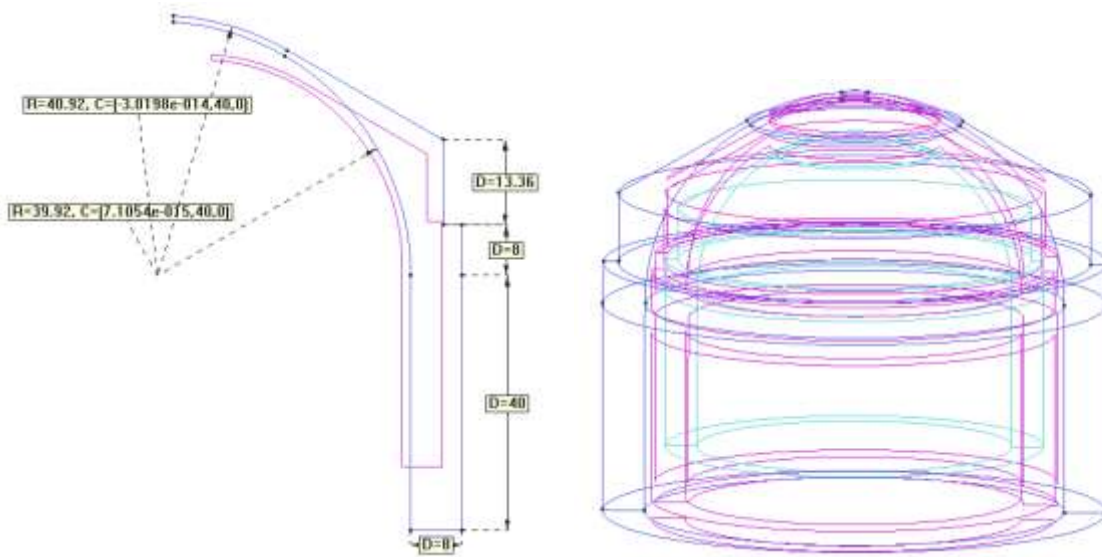
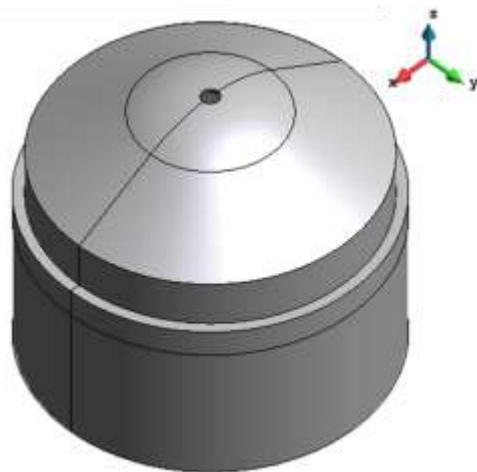


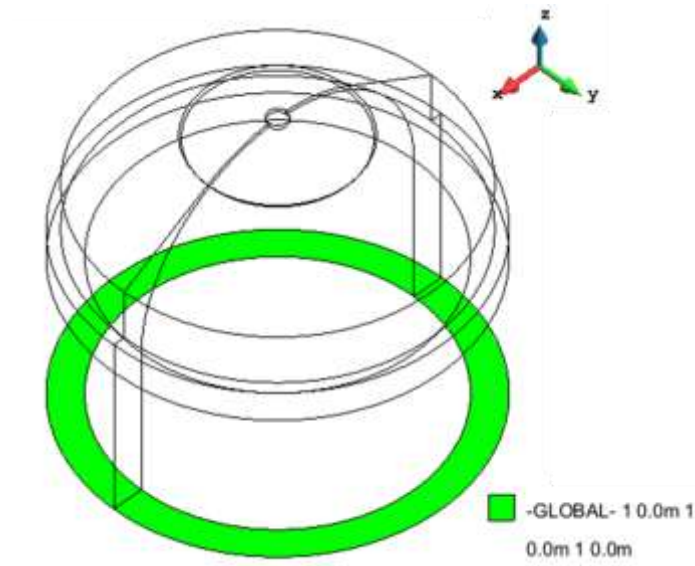
Figura 47 Geometría final panteón



Restricciones de desplazamiento Panteón 3D

La parte inferior del panteón esta empotrada. El desplazamiento se restringe en todos los sentidos en la superficie inferior

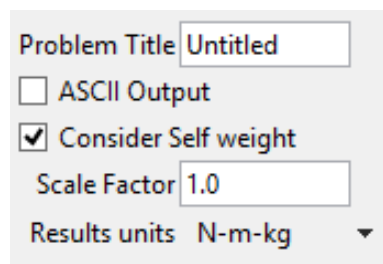
Figura 48 Restricciones de Desplazamiento panteón 3D



Cargas

El panteón está cargado con el peso propio.

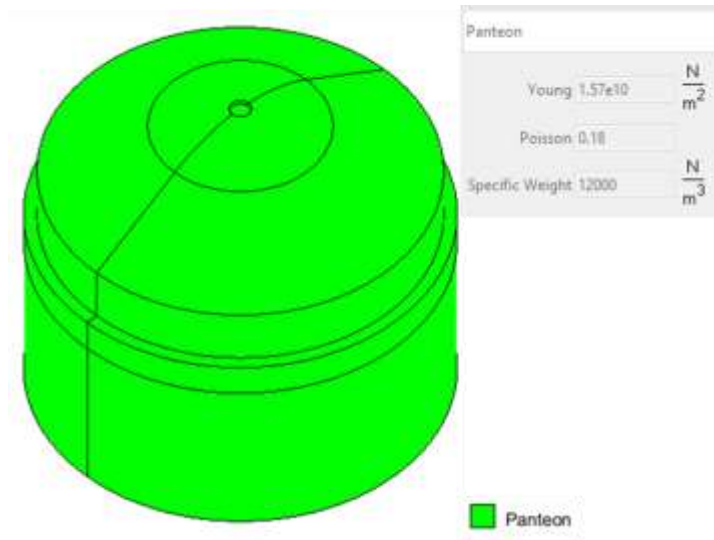
Figura 49 Carga peso propio panteón 3D



Material

Se introduce el tipo de material según lo las especificaciones del panteón

Figura 50 Tipo de material panteón



Selección de malla (Convergencia). Panteón 3D

Con el objetivo de garantizar resultados óptimos se hace necesario realizar un análisis de convergencia de la malla que se va a utilizar en el panteón. Este se realizara cambiando el tamaño de malla (refinándola) y analizando los desplazamientos de un punto contenido en esta.

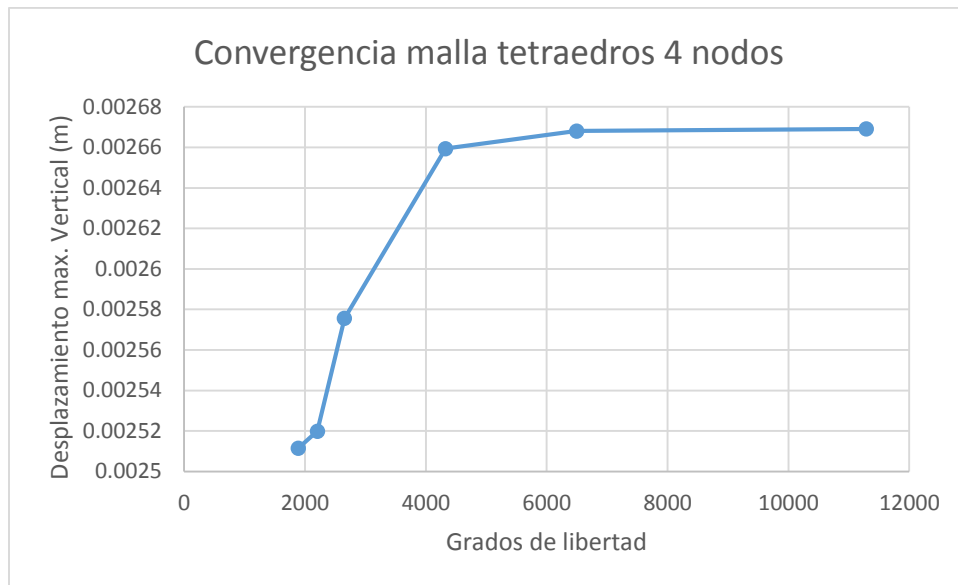
Se opta por utilizar una malla de elementos tetraedros de 4 nodos ya que estos se amoldan fácilmente a la mayoría de superficies y se podrían generar mayor número de elementos haciendo una malla lo suficientemente tupida para un análisis más preciso teniendo en cuenta las limitaciones del computador. Con esto se intenta generar un equilibrio entre el coste y un resultado confiable.

Se tendrá en cuenta el desplazamiento en el sentido vertical (z) del punto más donde se observa una mayor deformación. Los resultados se presentan a continuación

Tabla 7 Convergencia malla panteón

Convergencia Tetraedros 4 nodos 3D			
Tamaño de malla	# de nodos	GDL	Desplazamiento Y (m)
25	629	1887	0.0025115
20	735	2205	0.0025199
15	884	2652	0.0025756
10	1442	4326	0.0026594
8	2166	6498	0.0026681
6	3762	11286	0.0026691

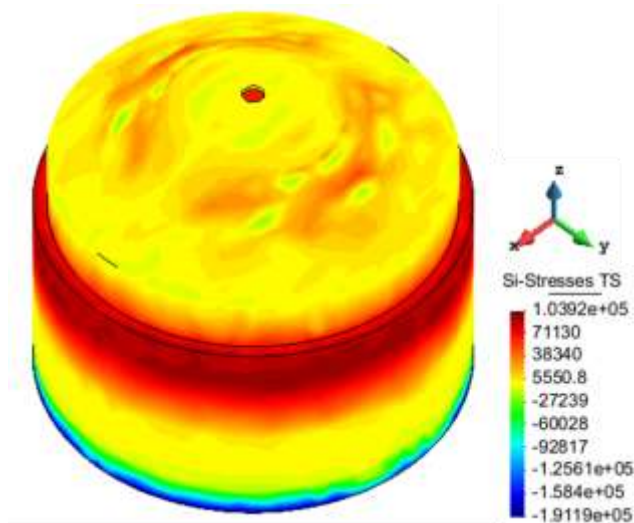
Figura 51 Convergencia malla panteón



Se elige el tamaño de malla de 6 m ya que presenta una estabilidad conveniente para trabajar el sistema. También teniendo en cuenta el sistema de computacional, si se hace una reducción mayor del tamaño de los elementos el coste sistemático sería demasiado alto

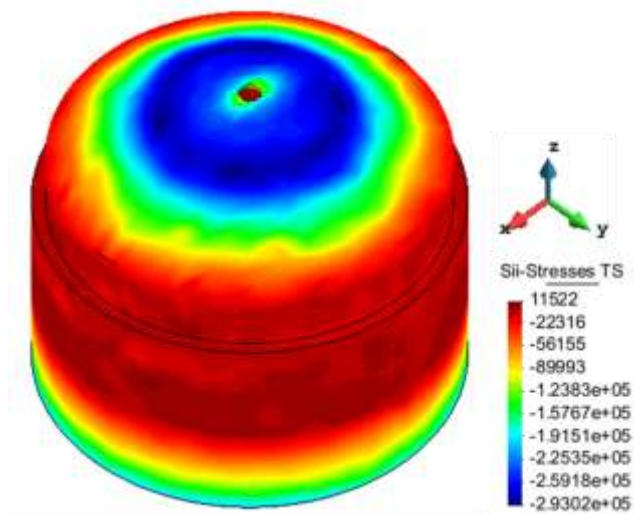
Tensiones

Figura 52 Estado de tensión S_i . Panteón 3D



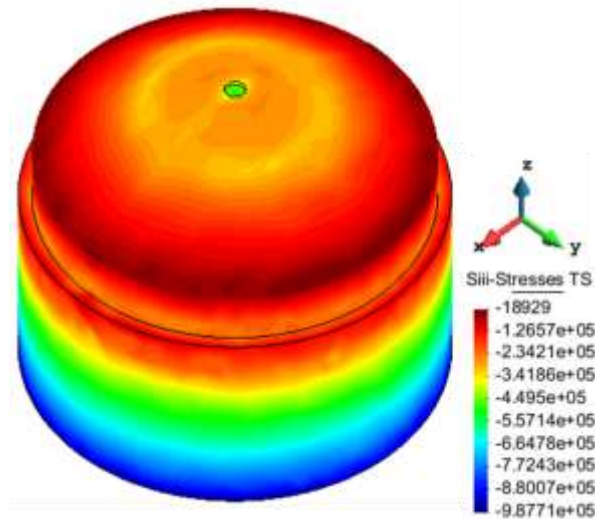
Como se observa en la figura 52, las tensiones máximas de tracción a las que está sometida la estructura se generan en la conexión entre el muro y la cúpula. Estas tracciones están muy por debajo del límite máximo requerido que es 1.8 MPa. La compresión máxima se genera en la base y tampoco sobrepasa el límite estipulado de 70 MPa.

Figura 53 Estado de tensión S_{ii} . Panteón 3D



Como se observa en la figura 53, en el estado de tensiones S_{ii} se presenta compresión en la cúpula y en la base del panteón. En la parte media de la estructura se generan estados de tracción debido al comportamiento de la deformada por la carga del propio peso.

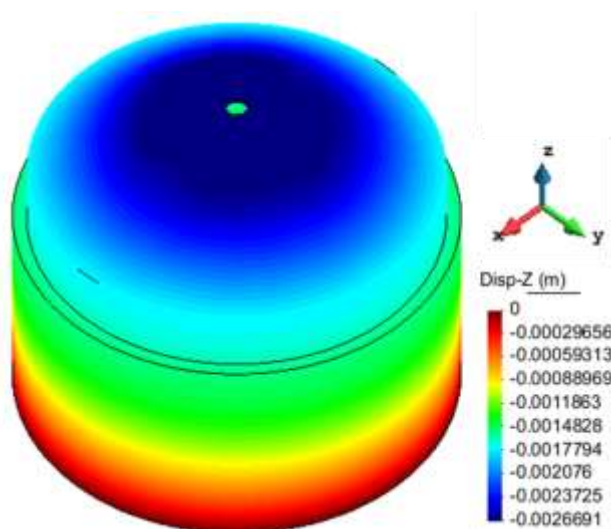
Figura 54 Estado de tensión S_{ii} . Panteón 3D



Se observa en la figura 54 que no se generan tracciones en la estructura. Los esfuerzos de compresión máximos se generan en la base siendo bajos con respecto al máximo estipulado

Desplazamientos

Figura 55 Desplazamiento Vertical Z. Panteón 3D



El peso propio de la estructura genera que la cúpula tienda a hundirse presentando desplazamientos verticales máximos en su parte más alta que van disminuyendo en los lugares más cercanos al empotramiento del suelo como se observa en la figura 55.

Figura 56 Desplazamiento eje X. Panteón 3D

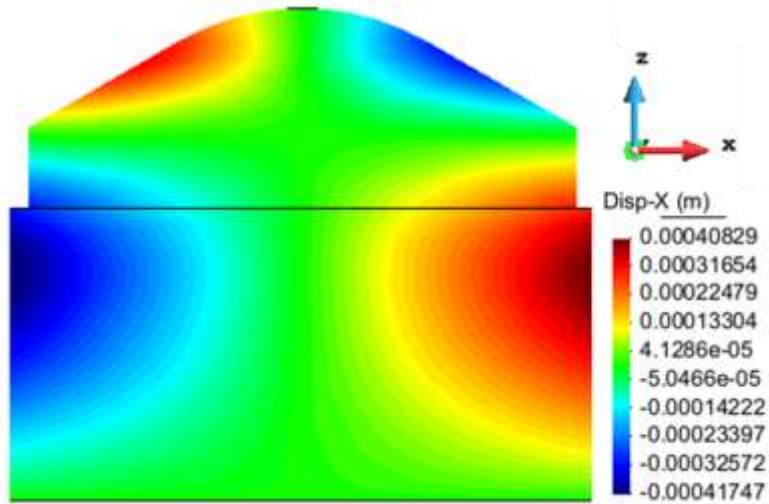


Figura 57 Desplazamiento eje Y. Panteón 3D

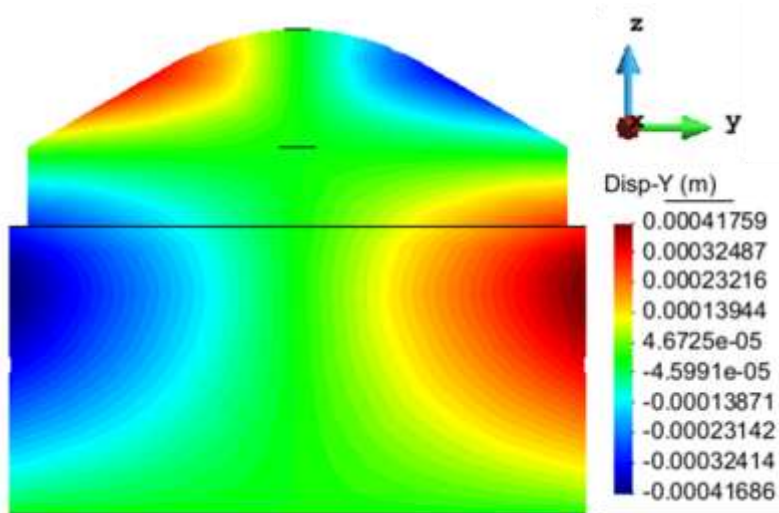
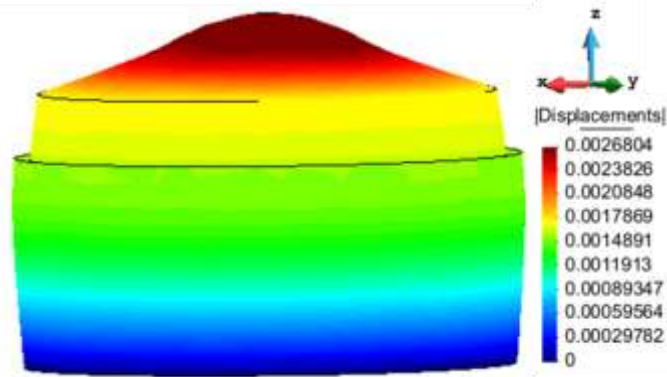


Figura 58 Desplazamientos totales y deformada. Panteón 3D



En la figuras 56, 57 y 58 de desplazamientos en el eje X, Y y totales respectivamente, se observa que la parte de la pared tiene una tendencia a expandirse y la parte de la cúpula tiene una tendencia a comprimirse generando desplazamientos en sentidos contrarios.

Factor de seguridad

El factor de seguridad indica el exceso de capacidad que tiene la estructura frente a sus requerimientos máximos, en este caso tensiones de compresión y tracción.

- a. Debido a la tracción

$$Fs = \frac{Tension\ maxima\ admisible}{Tension\ maxima\ calculada}$$

$$Fs\ Traccion = \frac{1.8\ MPa}{0.10392\ MPa} = 17.3$$

$$Fs\ Compresion = \frac{70\ MPa}{0.98771\ MPa} = 70.871$$

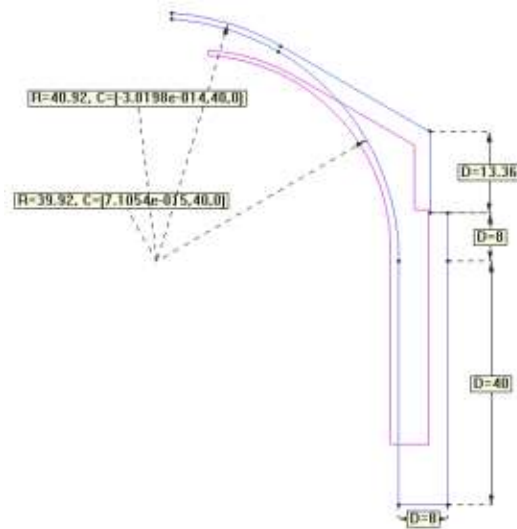
Se observa que hay un sobredimensionamiento excesivo en la estructura sobre todo para los estados de compresión

Modelo Solidos de revolución, Preproceso.

Geometría Panteón Solidos de revolución

Se introduce la geometría especificada del panteón.

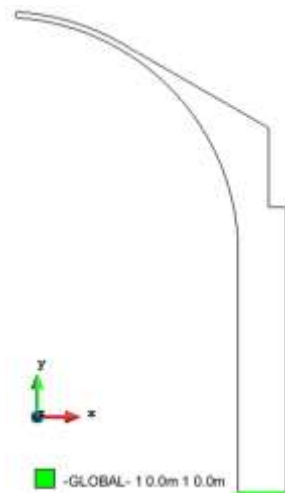
Figura 59 Geometría Panteón 3D



Restricciones de desplazamiento solidos de revolución

La parte inferior del panteón esta empotrada. El desplazamiento se restringe en los sentidos X e Y en la línea inferior

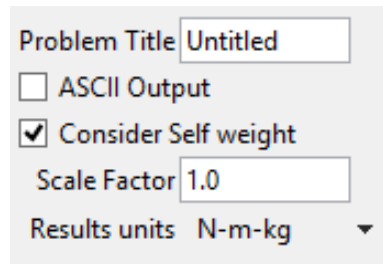
Figura 60 Restricciones de Desplazamiento panteón 3D



Cargas solidos de revolución

El panteón está cargado con el peso propio.

Figura 61 Carga peso propio panteón 3D



Material solidos de revolución

Se introduce el tipo de material según lo las especificaciones del panteon

Figura 62 Tipo de material panteón



Selección de malla (Convergencia). solidos de revolución

Con el objetivo de garantizar resultados óptimos se hace necesario realizar un análisis de convergencia de la malla que se va a utilizar en el panteón. Este se realizara cambiando el tamaño de malla (refinándola) y analizando los desplazamientos de un punto contenido en esta.

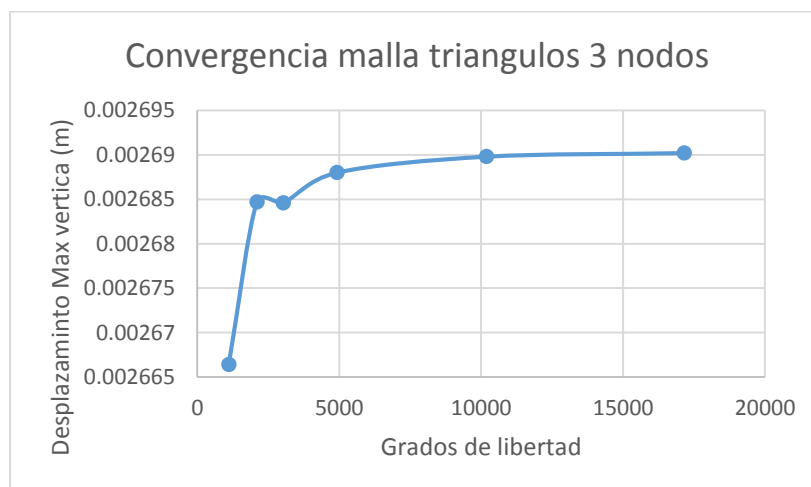
Se opta por utilizar una malla de elementos triangulares de 3 nodos ya que estos se amoldan fácilmente a la mayoría de superficies y se podrían generar mayor número de elementos haciendo una malla lo suficientemente tupida para un análisis más preciso teniendo en cuenta las limitaciones del computador. Con esto se intenta generar un equilibrio entre el coste y un resultado confiable.

Se tendrá en cuenta el desplazamiento en el sentido vertical (z) del punto más donde se observa una mayor deformación. Los resultados se presentan a continuación

Tabla 8 Convergencia malla panteón solidos de revolución

Convergencia malla Triángulos 3 nodos			
Tamaño de malla	# de nodos	GDL	Desplazamiento Y (m)
1.5	556	1112	0.0026664
1	1052	2104	0.0026847
0.8	1514	3028	0.0026846
0.6	2462	4924	0.002688
0.4	5094	10188	0.0026898
0.2	8578	17156	0.0026902

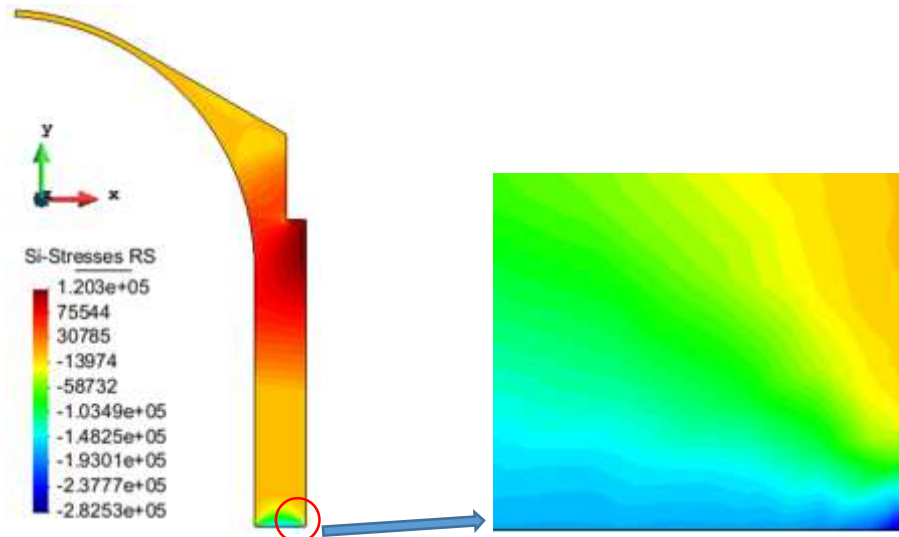
Figura 63 Convergencia malla triángulos 3 nodos



Se elige el tamaño de malla de 0.4 m ya que presenta una estabilidad conveniente para trabajar el sistema. También teniendo en cuenta el sistema de computacional, si se hace una reducción mayor del tamaño de los elementos el coste sistemático sería demasiado alto.

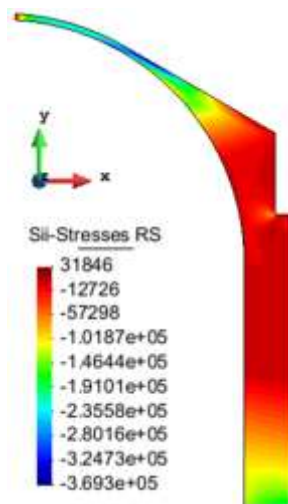
Tensiones

Figura 64 Estado de tensión S_{ii} . Panteón, sólidos de revolución



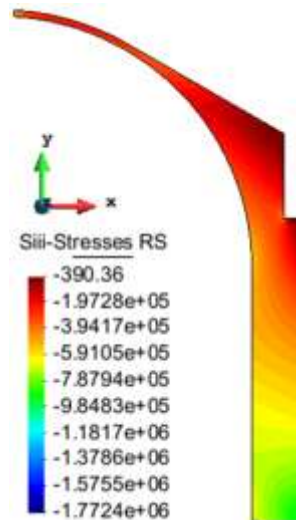
Como se observa en la figura 64, como en el modelo 3D las tensiones máximas de tracción a las que está sometida la estructura se generan en la conexión entre el muro y la cúpula. Estas tracciones están muy por debajo del límite máximo requerido que es 1.8 MPa. La compresión máxima se genera en la base y tampoco sobrepasa el límite estipulado de 70 MPa. Se comprobó mediante refinamiento de la malla que en el lugar donde marcado por el círculo de genera una concentración de esfuerzos de compresión que va a ser omitido para el análisis de resultados.

Figura 65 Estado de tensión S_{ii} . Panteón, Sólidos de revolución



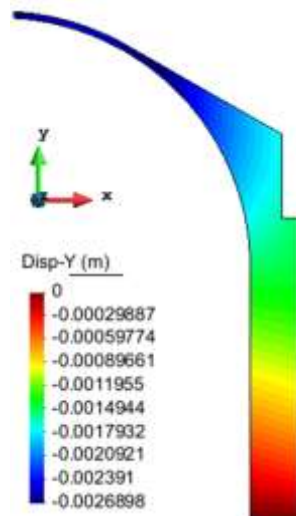
Como se observa en la figura 65, en el estado de tensiones S_{ii} se presenta compresión en la cúpula y en la base del panteón comportamiento similar que en el modelo 3D. En la parte media de la estructura se generan estados de tracción debido al comportamiento de la deformada por la carga del propio peso.

Figura 66 Estado de tensión S_{ii} . Panteón, Solidos de revolución



Se observa en la figura 66 que no se generan tracciones en la estructura. Los esfuerzos de compresión máximos se generan en la base siendo bajos con respecto al máximo estipulado

Figura 67 Desplazamiento Vertical Y Panteón, solidos de revolución



El peso propio de la estructura genera que la cúpula tienda a hundirse presentando desplazamientos verticales máximos en su parte más alta que van disminuyendo en los lugares más cercanos al empotramiento del suelo como se observa en la figura 67.

Figura 68 Desplazamiento eje X. Panteón, sólidos de revolución

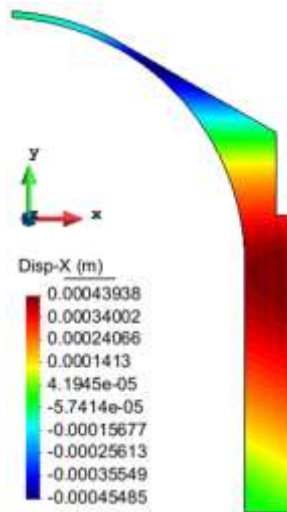
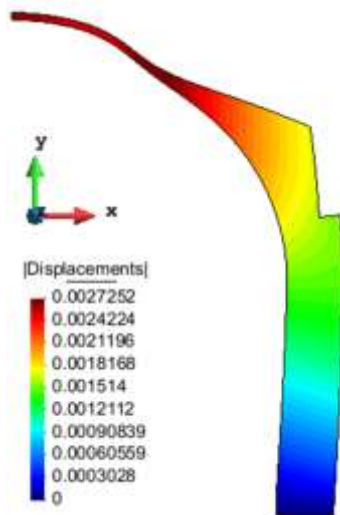


Figura 69 Desplazamientos totales y deformada. Panteón 3D



En la figuras 68 y 69 de desplazamientos en el eje X, Y y totales respectivamente, se observa que presenta el mismo comportamiento que el modelo 3D. La pared del panteón tiene una tendencia a expandirse y la parte de la cúpula tiene una tendencia a comprimirse generando desplazamientos en sentidos contrarios.

Factor de seguridad

El factor de seguridad indica el exceso de capacidad que tiene la estructura frente a sus requerimientos máximos, en este caso tensiones de compresión y tracción.

- a. Debido a la tracción

$$F_s = \frac{\textit{Tension maxima admisible}}{\textit{Tension maxima calculada}}$$

$$F_s \textit{ Traccion} = \frac{1.8 \textit{ MPa}}{0.1023 \textit{ MPa}} = 17.6$$

$$F_s \textit{ Compresion} = \frac{70 \textit{ MPa}}{0.28016 \textit{ MPa}} = 249.85$$

En ambos casos es factor de seguridad es exagerado siguiendo la misma tendencia que en el modelo 3D, sin embargo, en el estado de compresión el Fs es mucho mayor sobredimensionando la estructura 250 veces de lo requerido.

Comparación de resultados 3D y solidos de revolución

Tabla 9 Comparación de resultados entre solidos de revolución y 3D

	3D	Solidos de revolución
Desplazamiento Max Vertical Z (m)	-0.0026691	-0.0026898
Desplazamiento Horizontal Y (m)	-0.00041686	-0.00045485
Desplazamiento Max Transversal X (m)	-0.00041747	0
Tracción Máxima MPa	0.10392	0.1023
Compresión Máxima MPa	0.98771	0.28016



Conclusiones

- ✓ En general los dos modelos presentan una tendencia similar de desplazamientos y de estado de tensiones. La gran diferencia se presenta en las tensiones de compresión en la base de la estructura, esto puede ser debido a el tamaño de mallado elegido teniendo en cuenta a las restricciones del sistema computacional. Sin embargo, los resultados en su mayoría son coherentes demostrando que este problema se puede modelar por cualquiera de los dos métodos y obtener resultados confiables para analizar su comportamiento.
- ✓ Teniendo en cuenta el factor de seguridad encontrado, por tensión y compresión, se puede observar que la estructura está sobredimensionada. Cuando uno analiza la geometría del sistema, se observa que la pared donde se apoya la cúpula tiene un gran espesor (8 m) al contrario de la cúpula que solo tiene 1 m en su parte más alta, generando tensiones mínimas en su apoyo. Generalmente esta tendencia la presentan la mayoría de estructuras diseñadas por los romanos donde fácilmente se puede notar la diferencia con las estructuras modernas que poseen una gran esbeltez optimizando en la cantidad de materiales, reduciendo costes y facilitando su construcción.
- ✓ Al ver que los resultados son similares, por costes es más conveniente realizar el modelo de sólidos de revolución. La facilidad del dibujo de la geometría, la asignación de datos, el tiempo de cálculo hacen la diferencia con respecto al modelo 3D. Sin embargo, si los costes no son un impedimento, el modelo 3D puede ser más conveniente porque es una aproximación más cercana a la realidad y la interpretación de los datos es óptima al momento de sacar conclusiones del comportamiento de la estructura.
- ✓ Al analizar este tipo de estructuras en cúpula, se puede observar que hay que prestar gran atención en el lugar de conexión entre pared o columna y cúpula. En este lugar es donde se están generando las mayores tensiones de tracción y la estructura podría sufrir una deformación, que en el caso de exceder el límite podría generar un colapso.