BASICS EXERCISES. EMILIO SÁNCHEZ.

PROBLEM 01.

$$f(x) := x^3 + 2x^2 + 10x - 20 = 0 \quad ; \quad x^0 = \sqrt[3]{20}$$

4 Iterations of Newton's method.

$$x^{k+1} = x^k - \frac{f(x^k)}{f'(x^k)} \quad ; \quad f'(x) = 3x^2 + 4x + 10$$

Error relativo: $r^k = \dfrac{x^k - x^{k+1}}{x^{k+1}}$

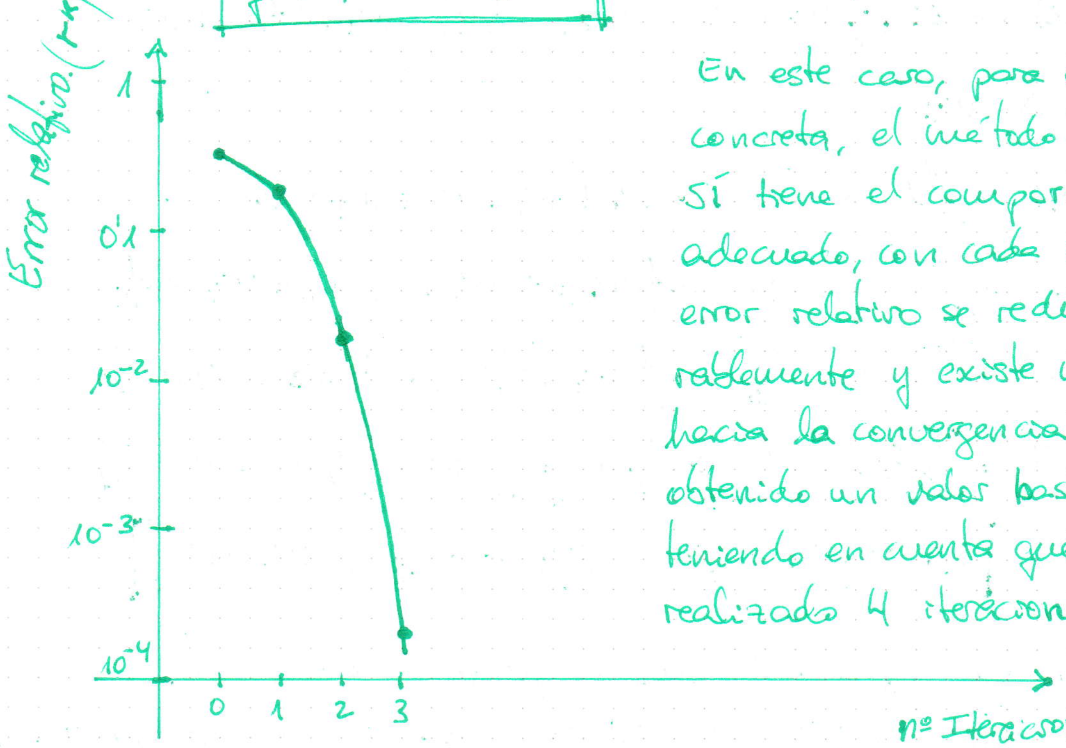
$x^0 = \sqrt[3]{20}$: $f(x^0) = 41'8803$, $f'(x^0) = 42'9619$ | $x^1 = 1'7396 \Rightarrow r^0 = 0'5604$

$x^1 = 1'7396$: $f(x^1) = 8'7126$, $f'(x^1) = 26'0369$ | $x^2 = 1'4050 \Rightarrow r^1 = 0'2382$

$x^2 = 1'4050$: $f(x^2) = 0'7708$, $f'(x^2) = 21'5417$ | $x^3 = 1'3692 \Rightarrow r^2 = 0'0261$

$x^3 = 1'3690$: $f(x^3) = 0'0079$, $f'(x^3) = 21'1007$ | $x^4 = 1'3688 \Rightarrow r^3 = 0'0003$

$$\boxed{f(x^4) = 0'84 \cdot 10^{-6}}$$



En este caso, para esta función concreta, el método de Newton sí tiene el comportamiento adecuado, con cada iteración el error relativo se reduce considerablemente y existe una tendencia hacia la convergencia, habiendo obtenido un valor bastante preciso teniendo en cuenta que sólo se han realizado 4 iteraciones.

PROBLEM 05.

a) Para cuadraturas de tercer orden, necesitamos como mínimo 2 puntos de integración y dos pesos. obteniéndose de la siguiente forma:

$$\int_0^1 f(z)\,dz \simeq \sum_{i=0}^{1} w_i f(z_i) = w_0 f(z_0) + w_1 f(z_1).$$

(1) $P_0(x)=1 \rightarrow \int_0^1 1\,dx = 1 = w_0 P_0(z_0) + w_1 P_0(z_0) \rightarrow \boxed{w_0 + w_1 = 1}$

(2) $P_1(x)=x \rightarrow \int_0^1 x\,dx = \frac{1}{2} = w_0 P_1(z_0) + w_1 P_1(z_1) \longrightarrow w_0 \cdot z_0 + w_1 z_1 = \frac{1}{2}$

(3) $P_2(x)=x^2 \rightarrow \int_0^1 x^2\,dx = \frac{1}{3} = w_0 P_2(z_0) + w_1 P_2(z_1) \longrightarrow w_0 z_0^2 + w_1 z_1^2 = \frac{1}{3}$

(4) $P_3(x)=x^3 \rightarrow \int_0^1 x^3\,dx = \frac{1}{4} \longrightarrow w_0 z_0^3 + w_1 z_1^3 = \frac{1}{4}$

Solución del sistema: $\boxed{\begin{array}{l} w_0 = w_1 = 0'5 \\ z_0 = 0'2113248654 \\ z_1 = 0'7886751346 \end{array}}$

b) Sí sería posible, pues tenemos más puntos de integración de los necesarios. La ecuación quedaría:

$$\int_0^1 f(z)\,dz \simeq \sum_{i=0}^{3} w_i f(z_i) = w_0 f(1/4) + w_1 f(1/2) + w_2 f(3/4) + w_3 f(1)$$

Obtención de w_i:

(1) $P_0(x)=1 \rightarrow \int_0^1 1\,dx = 1 \longrightarrow w_0 + w_1 + w_2 + w_3 = 1$

(2) $P_1(x)=x \rightarrow \int_0^1 x\,dx = \frac{1}{2} \longrightarrow \frac{1}{4}w_0 + \frac{1}{2}w_1 + \frac{3}{4}w_2 + w_3 = \frac{1}{2}$

(3) $P_2(x)=x^2 \rightarrow \int_0^1 x^2\,dx = \frac{1}{3} \longrightarrow \frac{1}{16}w_0 + \frac{1}{4}w_1 + \frac{9}{16}w_2 + w_3 = \frac{1}{3}$

(4) $P_3(x)=x^3 \rightarrow \int_0^1 x^3\,dx = \frac{1}{4} \longrightarrow \frac{1}{64}w_0 + \frac{1}{16}w_1 + \frac{27}{64}w_2 + w_3 = \frac{1}{4}$

Solución: $\boxed{w_0 = w_2 = \frac{2}{3}\ ,\ w_1 = -\frac{1}{3}\ ,\ w_3 = 0}$

Tiene sentido que w_3 sea 0 pues el punto de integración asociado es el mismo que el límite superior del intervalo de integración $[0,1]$.

PROBLEM 06.

a) Si se incrementa en uno el número de puntos de integración sobre los n previos, el mayor orden del polinomio que se podrá integrar de manera exacta será:

$$\boxed{2n+2}$$

b) Para el primer caso, no se podría integrar con exactitud, independientemente del valor de n, pues el polinomio de interpolación generado nunca podrá ser exactamente igual a una función trigonométrica.

ii) $\int_0^1 x^3 dx \rightarrow$ La función es un polinomio de grado 3, con $n=2$, se podrán integrar con precisión los polinomios de grado menor o igual que $\underline{2n+1=5}$.

iii) De nuevo es afirmativo por el mismo motivo que ii).

iv) En este caso no porque $\underline{2n+1=5 \ngtr 5{,}5}$.

PROBLEM 07.

$$\int_0^1 12x\,dx \quad , \quad \int_0^1 (5x^3+2x)\,dx$$

i) Trapezoidal rule over 2 uniform intervals $\Rightarrow \underline{x_0=0,\ x_1=0'5,\ x_2=1}$

$$I=\int_0^1 12x\,dx=\frac{h}{2}\left(f(x_0)+2\sum_{i=1}^{m-1}f(x_i)+f(x_2)\right)-m\frac{h^3}{12}f''(\mu)$$

Para $f(x)=12x \longrightarrow f''(x)=0$; $h=\frac{b-a}{m}=\frac{1}{2}$

$$\int_0^1 12x\,dx=\frac{1}{4}\left(0+2\cdot 6+12\right)-0=\underline{6 \longrightarrow E_m^T=0}$$

Para $f(x)=5x^3+2x \longrightarrow f''(x)=30x$

$$\int_0^1 (5x^3+2x)\,dx=\frac{1}{4}\left(0+2\cdot\left(\frac{5}{8}+1\right)+5+2\right)=\underline{\frac{41}{16}}$$

$$E_m^T=-m\frac{h^3}{12}f''(\mu)=-\frac{(b-a)^3}{12m^2}f''(0'5)=-\underline{\frac{5}{16}}$$

ii) Simpson's rule: $h=(b-a)/2m=\frac{1}{4}$

$$I=\int_a^b f(x)\,dx=\frac{h}{3}\sum_{i=1}^{m}\left(f(x_{2i-2})+4f(x_{2i-1})+f(x_{2i})\right)+E_m^S$$

$$E_m^S=-\frac{h^5}{90}\sum_{i=1}^{m}f^{IV}(\mu_i)=-\frac{(b-a)^5}{2880m^4}f^{IV}(\mu)$$

$m=2 \wedge [0,1] \Longrightarrow x_0=0,\ x_1=0'25,\ x_2=0'5,\ x_3=0'75,\ x_4=1$

Para $f(x) = 12x \rightarrow f^{IV} = 0$

$$I = \int_0^1 12x\,dx = \frac{1}{12}\sum_{i=1}^{2}\left(12x_{2i-2} + 4\cdot 12x_{2i-1} + 12x_{2i}\right) =$$

$$= \frac{1}{12}\left(\cancel{12\cdot 0} + \cancel{4}\cdot 12\cdot\frac{1}{\cancel{4}} + 12\cdot\frac{1}{2} + 12\cdot\frac{1}{2} + \cancel{4}\cdot 12\cdot\frac{3}{\cancel{4}} + 12\right) =$$

$$= \frac{1}{12}(6\cdot 12) = \underline{6} \longrightarrow \underline{E_m^S = 0}$$

Para $f(x) = 5x^3 + 2x \longrightarrow f^{IV} = 0$

$$I = \int_0^1 (5x^3 + 2x)\,dx \longrightarrow I = \frac{1}{12}\left(4\left(\frac{5}{64} + \frac{1}{2}\right) + \frac{5}{8} + 1 \overset{+5/8}{} + 1 + 4\left(\frac{5\cdot 27}{64} + \frac{3}{2}\right) + 7\right)$$

$$\boxed{\cancel{I = \frac{211}{96}}} \longrightarrow \underline{E_m^S = 0} \longleftarrow I = \frac{9}{4}$$

En el primer caso, el error obtenido con la regla del trapecio era de esperar que fuera nulo con la función lineal mientras que con la función de tercer orden empieza a ser un error significativo para el número de intervalos escogidos, por lo que no es buen método de aproximación.

En el caso del método de Simpson, con $m=2$ obtenemos soluciones exactas para polinomios de grado menor o igual a

$m=2$, por $\Longrightarrow$ grado $= m+1 = \underline{3}$

Ambos polinomios son de grado 3 o inferior por lo que el método ofrece un resultado preciso.

PROBLEM 10.

Como el grado de ambos polinomios es 3, escogemos $n=2$ para poder obtener la solución exacta.

$n=2$, $x, y \in [0,1] \Longrightarrow x_0 = y_0 = 0,\ x_1 = y_1 = \frac{1}{4},\ x_2 = y_2 = \frac{1}{2},\ x_3 = y_3 = \frac{3}{4},\ x_4 = y_4 = 1$

$$I_1 = \int_0^1 (9x^3 + 8x^2)\,dx = \frac{1}{12}\left(4\cdot\left(\frac{9}{64} + \frac{1}{2}\right) + 2\left(\frac{9}{8} + 2\right) + 4\left(\frac{9\cdot 27}{64} + \frac{72}{16}\right) + 17\right);$$

$$\underline{I_1 = \frac{59}{12}} \longrightarrow \underline{E_n^S = 0}$$

$$I = I_1\int_0^1 (y^3 + y)\,dy = \frac{59}{12^2}\left(4\left(\frac{1}{64} + \frac{1}{4}\right) + 2\left(\frac{1}{8} + \frac{1}{2}\right) + 4\left(\frac{27}{64} + \frac{3}{4}\right) + 2\right) = \underline{\frac{59}{16}}$$

$$I = \int_0^1\int_0^1 (y^3 + y)(9x^3 + 8x^2)\,dx\,dy = \underline{\frac{59}{16}} \longrightarrow E_n^S = 0$$

El resultado es completamente preciso y se acerca a lo esperado, pues se ha impuesto la condición de $n=2$.