MAESTRÍA EN INGENIERÍA ESTRUCTURAL Y DE CONSTRUCCIÓN

UNIVERSITAT POLITÉCNICA DE CATALUNYA

TRABAJO N°03: The Plane Stress Problem The 3-Node Plane Stress Triangle

Student:

Elvis Roberto Gomez Quispe

Assignment 3.1

On "The Plane Stress Problem":

In isotropic elastic materials (as well as in plasticity and viscoelasticity) it is convenient to use the so-called Lamé constants λ and μ instead of E and ν in the constitutive equations. Both λ and μ have the physical dimension of stress and are related to E and ν by

$$\lambda = \frac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)} \quad \mu = G = \frac{E}{2(1+\nu)}$$

1. Find the inverse relations for E,ν in terms of λ,μ.
2. Express the elastic matrix for plane stress and plane strain cases in terms of λ,μ.
3. Split the stress-strain matrix E for plane strain as

$$\boldsymbol{E} = \boldsymbol{E_\lambda} + \boldsymbol{E_\mu}$$

in which $E\mu$ and E_λ contain only μ and λ, respectively.

This is the Lamé $\{\lambda,\mu\}$ splitting of the plane strain constitutive equations, which leads to the so-called B-bar formulation of near-incompressible finite elements.

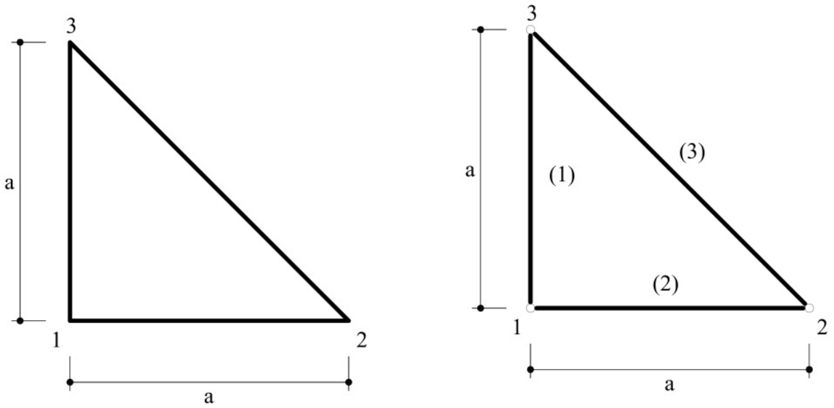
4. Express E_λ and E_μ also in terms of E and ν.

Assignment 3.2

On “The 3-node Plane Stress Triangle”:

Consider a plane triangular domain of thickness *h*, with horizontal and vertical edges of length *a*. Let us consider for simplicity $a = 1$, $h = 1$. The material parameters are E, ν. Initially ν is set to zero. Two discrete structural models are considered as depicted in the figure:

a) A plane linear Turner triangle with the same dimensions.
b) A set of three bar elements placed over the edges of the triangular domain. The cross sections for the bars are $A_1 = A_2$ and A_3.



1. Calculate the stiffness matrices $\boldsymbol{K}_{tri}$ and $\boldsymbol{K}_{bar}$ for both discrete models.
2. Is there any set of values for the cross sections A_1=A_2 and A_3 to make both stiffness matrix equivalent: $\boldsymbol{K}_{bar} = \boldsymbol{K}_{tri}$? If not, which are the values that make them more similar?
3. Why these two stiffness matrices are not equal?. Find a physical explanation.
4. Consider nowidering $\nu \neq 0$ and extract some conclusions.

Date of Assignment: 19 / 02 / 2018
Date of Submission: 26 / 02 / 2018

The assignment must be submitted as a pdf file named **As3-Surname.pdf** to the CIMNE virtual center.

Problema 3.1.

1- Encontrar las relaciones inversas de E, ν en Terminos de λ, μ

Partimos del analisis lineal, en un contexto Anisótropo donde podremos considerar a la ley de hooke generalizada:

$$\sigma_{ij} = C_{ijkl} \varepsilon_{kl} \quad \ldots (I)$$

Donde el Tensor de cuarto orden C_{ijkl} de las propiedades del material es considerado como el "modulo elastico".

Considerando la simetria del tensor de esfuerzo; tendremos:

$$\sigma_{ij} = \sigma_{ji} \Rightarrow C_{jikl} = C_{ijkl}$$

Luego para el caso de materiales isotropicos, considerando las condiciones de la ecuacion generalizada de hooke ademas de las condiciones de simetria es posible demostrar que el N° de parametros independientes de "C" se reducen a 2 siendo estos λ, μ quedando la ecuacion (I) en esta expresión:

$$\sigma_{ij} = \lambda \varepsilon_{kk} \delta_{ij} + 2\mu \varepsilon_{ij} \quad \ldots (II)$$

Para obtener la expresion inversa (Deformacion en terminos de tensiones) contraemos los indices de la ecuación (II):

Si $\sigma_{kk} = \sigma_x + \sigma_y + \sigma_z$

$$\Rightarrow \sigma_{kk} = \lambda \varepsilon_{kk} \cdot 3 + 2\mu \varepsilon_{kk} \Rightarrow \varepsilon_{kk} = \frac{\sigma_{kk}}{(3\lambda + 2\mu)} \quad \ldots (III)$$

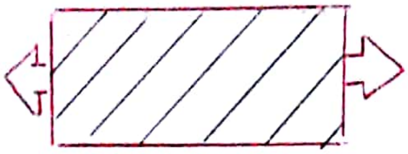
Luego sustituyendo la ecuacion (III) en (II):

$$\sigma_{ij} = \lambda \cdot \left(\frac{\sigma_{kk}}{3\lambda + 2\mu}\right) \cdot \delta_{ij} + 2\mu \cdot \varepsilon_{ij}$$

Luego despejando ε_{ij} tendremos:

$$\varepsilon_{ij} = \frac{\sigma_{ij}}{2\mu} - \frac{\lambda}{2\mu}\left(\frac{\sigma_{kk}}{3\lambda + 2\mu}\right)\delta_{ij} \quad \ldots (IV)$$

Luego para el caso de compresion o traccion simple:



Donde la unica componente no nula del Tensor de tensiones es σ_{11}, tambien se definen el modulo de Young (E) y el modulo de Poisson (ν):

$$E = \frac{\sigma_{11}}{\varepsilon_{11}} \quad \ldots\ldots (\text{V}) \qquad \nu = -\frac{\varepsilon_{22}}{\varepsilon_{11}} \quad \ldots\ldots (\text{VI})$$

luego apliamos la ecuacion (IV) al caso unidimensional. entonces tendremos:

$$\varepsilon_{11} = \frac{\sigma_{11}}{2\mu} - \frac{\lambda}{2\mu(3\lambda+2\mu)} \cdot (\sigma_{11} + \sigma_{22}) \cdot \delta_{11}$$

$$\varepsilon_{22} = \frac{\sigma_{22}}{2\mu} - \frac{\lambda}{2\mu(3\lambda+2\mu)} (\sigma_{11} + \sigma_{22}) \cdot \delta_{22}$$

Considerando que $\sigma_{22} = 0$; $\delta_{11} = \delta_{22} = 1$; tendremos:

$$\varepsilon_{11} = \frac{\sigma_{11}(\cancel{2}\lambda + \cancel{2}\mu)}{\cancel{2}\mu(3\lambda+2\mu)} = \frac{\sigma_{11}(\lambda+\mu)}{\mu(3\lambda+2\mu)} \quad \ldots\ldots (\text{VII})$$

$$\varepsilon_{22} = -\frac{\lambda\,\sigma_{11}}{2\mu(3\lambda+2\mu)} \quad \ldots\ldots (\text{VIII})$$

Finalmente reemplazamos las ecuaciones (VII) y (VIII) en las ecuaciones (V) y (VI) respectivamente:

$$E = \frac{\sigma_{11}}{\varepsilon_{11}} = \frac{\sigma_{11}}{\dfrac{\sigma_{11}(\lambda+\mu)}{\mu(3\lambda+2\mu)}} = \frac{\mu(3\lambda+2\mu)}{(\lambda+\mu)}$$

$$\nu = -\frac{\varepsilon_{22}}{\varepsilon_{11}} = -\left(\frac{\dfrac{-\lambda \cdot \sigma_{11}}{2\mu(3\lambda+2\mu)}}{\dfrac{\sigma_{11}(\lambda+\mu)}{\mu(3\lambda+2\mu)}}\right) = \frac{\lambda}{2(\lambda+\mu)}$$

2.

Dela ecuacion o ley generalizada de hooke en el contexto isotropico y lineal: teniamos la ecuacion (II):

$$\sigma_{11} = \lambda \varepsilon_{kk} \delta_{11} + 2\mu \varepsilon$$

luego esta se puede expresar en terminos de los coeficientes de lame en la que interviene la deformacion volumetrica; la forma clasica de las ecuaciones de lame es:

$$\sigma = \lambda e + 2\mu \varepsilon_x \qquad \tau_{xy} = \mu \gamma_{xy}$$
$$\sigma = \lambda e + 2\mu \varepsilon_y \qquad \tau_{xz} = \mu \gamma_{xz}$$
$$\sigma = \lambda e + 2\mu \varepsilon_z \qquad \tau_{yz} = \mu \gamma_{yz}$$

Donde se considera $e = \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z$

$$\delta_{11} = \delta_{22} = \delta_{33} = 1$$

luego podremos expresarlas ecuaciones de Lame matricialmente:

$$\begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_z \\ \tau_{xy} \\ \tau_{xz} \\ \tau_{yz} \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} \lambda+2\mu & \lambda & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ \lambda & \lambda+2\mu & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ \lambda & \lambda & \lambda+2\mu & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mu & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \mu & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \mu \end{bmatrix}}_{\text{Matriz de Elasticidad}} \begin{bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_z \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{xz} \\ \gamma_{yz} \end{bmatrix} \quad \ldots (a)$$

Para el caso del plano de esfuerzos y deformaciones Tendremos:

$$\begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda+2\mu & \lambda & 0 \\ \lambda & \lambda+2\mu & 0 \\ 0 & 0 & \mu \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix}$$

3.

Considerando como se vio anteriormente ; en la ecuacion matricial (a) Tomando en cuenta ; que esta integrada por los coeficientes de Lame "λ ; μ" podremos realizar la siguiente descomposición :

$$\underbrace{\begin{bmatrix} \lambda & \lambda & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ \lambda & \lambda & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ \lambda & \lambda & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}} + \underbrace{\begin{bmatrix} 2\mu & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2\mu & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2\mu & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mu & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \mu & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \mu \end{bmatrix}}$$

En funcion de λ

$$E_\lambda = \begin{bmatrix} \lambda & \lambda & 0 \\ \lambda & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

(Para esfuerzos en Planos)

En funcion de μ

$$E_\mu = \begin{bmatrix} 2\mu & 0 & 0 \\ 0 & 2\mu & 0 \\ 0 & 0 & \mu \end{bmatrix}$$

(Para esf. en Planos)

4.

Representamos las matrices E_λ y E_μ que conforman la matriz de elasticidad en función de E y V ; para lo cual nos basaremos en:

$$\lambda = \frac{E.V}{(1+V)(1-2V)} \qquad \mu = \frac{E}{2(1+V)}$$

$$E_\lambda = \frac{E.V}{(1+V)(1-2V)} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ & & 1 & 0 & 0 & 0 \\ & & & 0 & 0 & 0 \\ & & & & 0 & 0 \\ & \text{Simetrico} & & & & 0 \end{bmatrix}$$

$$E_\lambda = \frac{E\ V}{(1+V)\ (1-2V)} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

(Para plano de esfuerzos y deformaciones)

$$E_u = \frac{E}{2(1+\nu)} \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & 2 & 0 & 0 & 0 \\ & & & 1 & 0 & 0 \\ & & & & 1 & 0 \\ \text{Simétrico} & & & & & 1 \end{bmatrix}$$

$$E_u = \frac{E}{2(1+\nu)} \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$ (Para plano de esfuerzos y deformaciones)

Scanned by CamScanner

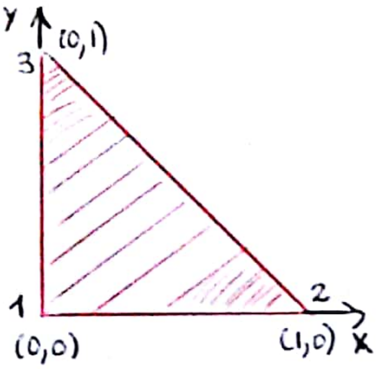
Problema 3.2

Parte 1.

Matriz de Rigidez del CTS (K_{Tri})

Por definicion tendremos que : $K^e = T_e A_e B^T . E . B$

Luego desarrollamos:



i)

$$E = \frac{E}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix}$$

considerando inicialmente $\nu = 0$

$$E = E \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0.5 \end{bmatrix}$$

ii)

$$B = \frac{1}{2A} \begin{bmatrix} y_{23} & 0 & y_{31} & 0 & y_{12} & 0 \\ 0 & x_{32} & 0 & x_{13} & 0 & x_{21} \\ x_{32} & y_{23} & x_{13} & y_{31} & x_{21} & y_{12} \end{bmatrix}$$

Considerando el valor del area $A = \frac{(1)(1)}{2} = 0.5$

$$B = 1. \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Luego considerando el espesor ; $Te = 1$; Tendremos:

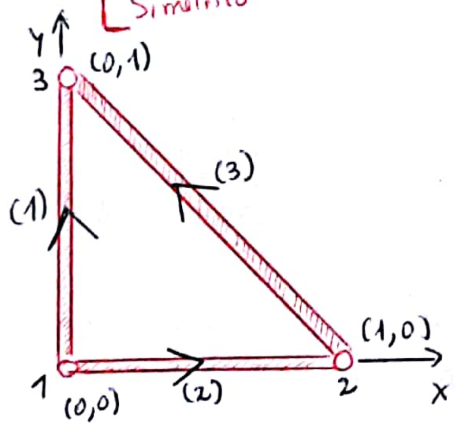
$$K_{Tri} = Ke = Te.A. \begin{bmatrix} -1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E & 0 & 0 \\ 0 & E & 0 \\ 0 & 0 & 0.5E \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

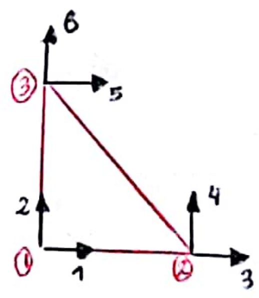
$$K_e = t_e \cdot A \cdot E \begin{bmatrix} 1.5 & 0.5 & -1 & -0.5 & -0.5 & 0 \\ & 1.5 & 0 & -0.5 & -0.5 & -1 \\ & & 1 & 0 & 0 & 0 \\ & & & 0.5 & 0.5 & 0 \\ & & & & 0.5 & 0 \\ \text{SimeTrico} & & & & & 1 \end{bmatrix}$$

$$K_{TRI} = K_e = E \begin{bmatrix} 0.75 & 0.25 & -0.5 & -0.25 & -0.25 & 0 \\ & 0.75 & 0 & -0.25 & -0.25 & -0.5 \\ & & 0.5 & 0 & 0 & 0 \\ & & & 0.25 & 0.25 & 0 \\ & & & & 0.25 & 0 \\ \text{Simetrico} & & & & & 0.5 \end{bmatrix}$$

MaTriz de Rigidez de la armadura M (bar)

$$K_e = \frac{E_e A_e}{l_e} \begin{bmatrix} l^2 & lm & -l^2 & -lm \\ & m^2 & -lm & -m^2 \\ & & l^2 & lm \\ \text{SimeTrico} & & & m^2 \end{bmatrix} \qquad l = \frac{X_2 - X_1}{l_e} \qquad m = \frac{Y_2 - Y_1}{l_e}$$





Luego Tendremos la matriz de rigidez para cada barra :

$$K_1 = \frac{E A_1}{l_1 = 1} \cdot \begin{array}{c c} \begin{array}{cccc} 1 & 2 & 5 & 6 \end{array} & \\ \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ & 1 & 0 & -1 \\ & & 0 & 0 \\ \text{Simetrico} & & & 1 \end{bmatrix} & \begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 5 \\ 6 \end{array} \end{array}$$

$$l = \frac{X_3 - X_1}{l_1} = 0$$

$$m = \frac{Y_3 - Y_1}{l_1} = 1$$

Scanned by CamScanner

$$K_2 = \frac{E.A_2}{l_2 = 1} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} 1 & 2 & 3 & 4 \end{array} \\ \left[\begin{array}{cccc} 1 & 0 & -1 & 0 \\ & 0 & 0 & 0 \\ & & 1 & 0 \\ \text{Simetrico} & & & 0 \end{array}\right] \end{array} \begin{array}{c} \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{array}$$

$$l = \frac{X_2 - X_1}{l_2} = 1$$

$$m = \frac{Y_2 - Y_1}{l_2} = 0$$

$$K_3 = \frac{EA_3}{l_3 = \sqrt{2}} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} 3 & 4 & 5 & 6 \end{array} \\ \left[\begin{array}{cccc} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ & & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ \text{Simetrico} & & & \frac{1}{2} \end{array}\right] \end{array} \begin{array}{c} \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \end{array}$$

$$l = \frac{X_3 - X_2}{l_3} = \frac{-1}{\sqrt{2}}$$

$$m = \frac{Y_3 - Y_2}{l_3} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

Luego ensamblamos para encontrar la matriz de rigidez total de la armadura:

$$K_{tot} = K_T = E.A \begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \end{array} \\ \left[\begin{array}{cccccc} 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ & & 1 + \frac{1}{2\sqrt{2}} & -\frac{1}{2\sqrt{2}} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ & & & \frac{1}{2\sqrt{2}} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ & & & & \frac{1}{2\sqrt{2}} & -\frac{1}{2\sqrt{2}} \\ \text{Simetrico} & & & & & \frac{1}{2\sqrt{2}} + 1 \end{array}\right] \end{array} \begin{array}{c} \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \end{array}$$

Parte 2:

Si observamos las matrices de rigidez obtenidas del plano triangular (CTS) K_{TRI} y la matriz de rigidez de la armadura K_{bar} notamos para ninguna valor de $A = A_1 = A_2 = A_3$ se podra conseguir igualar $K_{TRI} = K_{bar}$

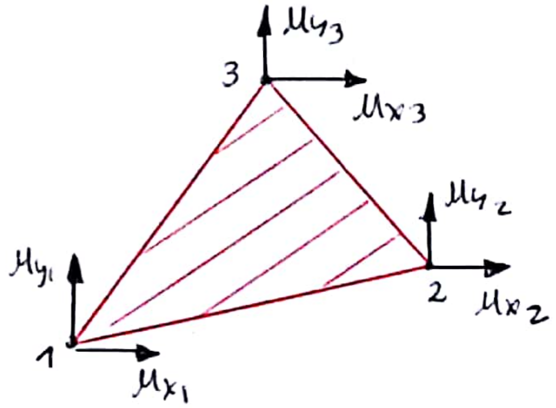
Asi tambien notamos que podremos aproximar ambas matrices; si asumimos un valor un valor de $A = 0.5$; obteniendo:

$$K_{bar} = K_T = \quad E \cdot \begin{bmatrix} 0.5 & 0 & -0.5 & 0 & 0 & 0 \\ & 0.5 & 0 & 0 & 0 & -0.5 \\ & & 0.677 & -0.177 & -0.25 & 0.25 \\ & & & 0.177 & 0.25 & -0.25 \\ & \text{Simetrico} & & & 0.177 & -0.177 \\ & & & & & 0.677 \end{bmatrix}$$

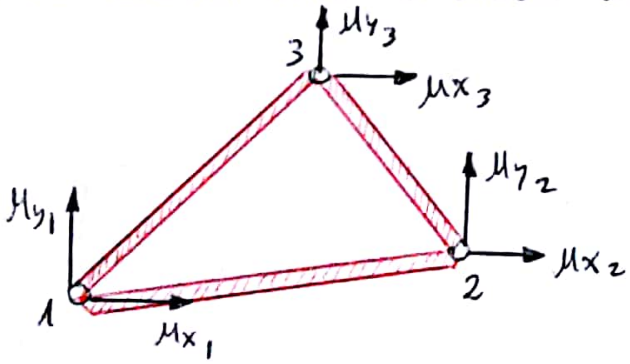
Se resaltan los valores similares respecto ala matriz de Rigidez "K_{TRI}"

Parte 3.

Las 2 matrices no son iguales toda vez que la concepción de rigidez son diferentes; mientras que en el caso del plano (K_{Tri}); esta se comporta como un solido rigido ya que solo presentará movimiento integral de todo el cuerpo ante una carga en las direcciones x, y:



Mientras que la armadura (K_{bar}); se comportará como un cuerpo barras articuladas; no involucrando a toda la estructura en las respue-sta; del cuerpo, ante la accion de las cargas en x, y:



Parte 4.

Al darse el caso que $\nu \neq 0$: entonces estaremos considerando que se comensará a presentar una deformacion transversal (ε_{2-2}) por lo que se involucraría que la rigidez se vería afectada en una disminucion de su capacidad, por la variacion dela sección.

Luego Tendremos:

$$\mathbb{E} = \frac{E}{1-\nu^2}\begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix}$$

$$K^e = \int_{\Omega^e} t_e B^T \mathbb{E} B \, \partial\Omega$$