



MAESTRÍA EN INGENIERÍA ESTRUCTURAL Y DE CONSTRUCCIÓN
UNIVERSITAT POLITÈCNICA DE CATALUNYA

TRABAJO N°07:
Thick and thin plates

Student:

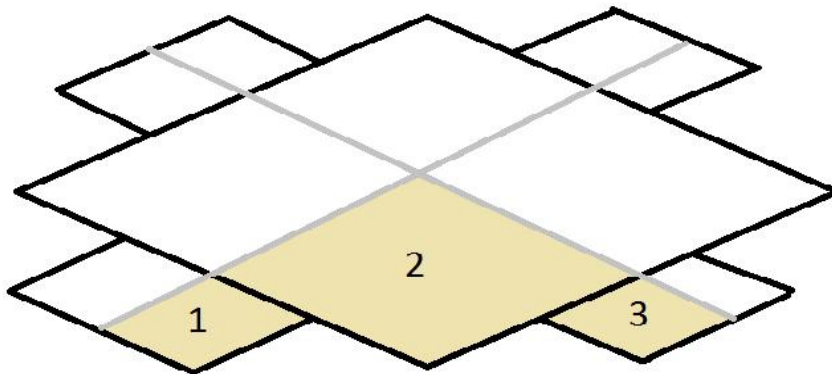
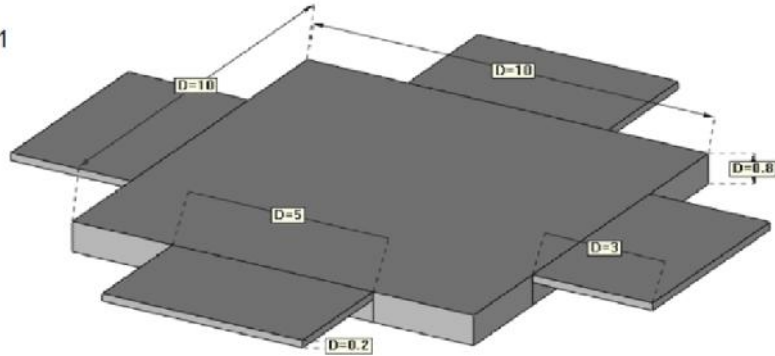
Elvis Roberto Gomez Quispe

Assignment

a) Think first and answer later.

What kind of strategy (theory, elements, integration rule, boundary conditions, etc) will you use for solving the following problems:

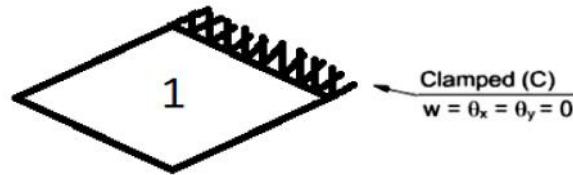
a.1



II. Analisis de la Placa Grande (2):

a. Modelo Matematico:

Analizamos los volados de manera aislada con la idealizacion de un voladizo empotrado, este elemento se debere de discretizar adecuadamente:



b. Metodo de Analisis:

Por tratarse de un elemento rigido de 20cm (mayor a 10cm), por lo que estara propenso a concentrar esfuerzos cortantes, por lo que emplearemos el metodo de Raissner-Middlin.

c. Calculo de Momentos:

Buscamos hallar los desplazamientos y giros en los nodos de los elementos a partir de la ecuacion:

$$\mathbf{K}^{(e)} \mathbf{a}^{(e)} - \mathbf{f}^{(e)} = \mathbf{q}^{(e)}$$

Calculo de Matriz de rigidez de elementos discretizados, a partir de la matriz de rigidez de flexion y de corte:

$$\mathbf{K}^{(e)} = \mathbf{K}_b^{(e)} + \mathbf{K}_s^{(e)}$$

$$\mathbf{K}_b^{(e)} = \int_{\int_{A^{(e)}} \mathbf{B}_b^T \hat{\mathbf{D}}_b \mathbf{B}_b dA \quad \mathbf{K}_s^{(e)} = \int_{\int_{A^{(e)}} \mathbf{B}_s^T \hat{\mathbf{D}}_s \mathbf{B}_s dA$$

donde:

$$\mathbf{D}_b = \frac{E}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix} \quad \mathbf{D}'_s = \begin{bmatrix} G & 0 \\ 0 & G \end{bmatrix} \quad G = \frac{E}{2(1-\nu)} \quad \Rightarrow \quad \begin{aligned} \hat{\mathbf{D}}_b &= \frac{1^3}{12} \mathbf{D}_b \\ \hat{\mathbf{D}}_s &= t \mathbf{D}_s \end{aligned}$$

$$\mathbf{B}_{bi} = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{\partial N_i}{\partial x} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{\partial N_i}{\partial y} \\ 0 & -\frac{\partial N_i}{\partial y} & -\frac{\partial N_i}{\partial x} \end{bmatrix} \quad \mathbf{B}_{si} = \begin{bmatrix} -\frac{\partial N_i}{\partial x} & N_i & 0 \\ -\frac{\partial N_i}{\partial y} & 0 & N_i \end{bmatrix} \quad \mathbf{B}_i = \left\{ \begin{array}{l} \mathbf{B}_{bi} \\ \dots \\ \mathbf{B}_{si} \end{array} \right\}$$

Calculo del vector de fuerza nodal:

$$\mathbf{f}_i^{(e)} = \int_{\int_{A^{(e)}} \mathbf{N}_i [q, 0, 0]^T dA$$

Calculo del vector de fuerzas externas:

$$\mathbf{q}_i^{(e)} = [P_i, 0, 0]^T$$

Conociendo la matriz y vector de fuerzas ensamblados a partir de los elementos discretizados, conoceremos los desplazamientos en los nudos $\mathbf{a}^{(e)}$. Posteriormente hallamos los vectores de deformación y con este último el vector de Momentos y Cortantes de equilibrio:

$$\hat{\boldsymbol{\epsilon}} = \begin{Bmatrix} \hat{\boldsymbol{\epsilon}}_b \\ \hat{\boldsymbol{\epsilon}}_s \end{Bmatrix} = \mathbf{B}\mathbf{a}^{(e)}$$

$$\hat{\boldsymbol{\sigma}} = \hat{\mathbf{D}}\hat{\boldsymbol{\epsilon}} = \begin{Bmatrix} \hat{\mathbf{D}}_b \hat{\boldsymbol{\epsilon}}_b \\ \hat{\mathbf{D}}_s \hat{\boldsymbol{\epsilon}}_s \end{Bmatrix} \Rightarrow \hat{\boldsymbol{\sigma}} = \begin{Bmatrix} \hat{\boldsymbol{\sigma}}_b \\ \hat{\boldsymbol{\sigma}}_s \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} M_x \\ M_y \\ M_{xy} \\ \dots \\ Q_{xz} \\ Q_{yz} \end{Bmatrix}$$

d. Cálculo de Desplazamientos y giros, interpolados:

Conociendo los valores de los desplazamientos $\mathbf{a}^{(e)}$, y conociendo los valores de las funciones de forma, podremos conocer el valor de los desplazamientos y giros en cualquier punto del interior de la placa, mediante la interpolación de los valores obtenidos en los nodos:

$$\mathbf{u} = [\mathbf{N}_1, \mathbf{N}_2, \dots, \mathbf{N}_n] \begin{Bmatrix} \mathbf{a}_1 \\ \dots \\ \mathbf{a}_n \end{Bmatrix} = \mathbf{N}\mathbf{a}^{(e)} \quad \mathbf{a}_i^{(e)} = \begin{Bmatrix} w_i \\ \theta_{xi} \\ \theta_{yi} \end{Bmatrix}$$

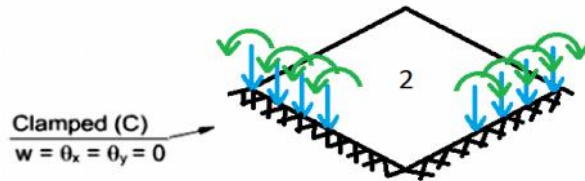
$$\mathbf{u} = \begin{Bmatrix} w \\ \theta_x \\ \theta_y \end{Bmatrix}$$

El análisis será el mismo para la placa voladiza 3.

II. Analisis de la Placa Grande (2):

a. Modelo Matematico:

Ahora analizamos de manera aislada la segunda placa, considerando la transferencia de cargas de los voladizos 1 y 3, consideramos que la placa 2 se apoya sobre un elemento muy rigido (viga de gran peralte), este elemento se debera de discretizar adecuadamente:



b. Metodo de Analisis:

Por tratarse de un elemento rigido de 20cm (mayor a 10cm), por lo que estara propenso a concentrar esfuerzos cortantes, por lo que emplearemos el metodo de Raissner-Middlin.

c. Calculo de Momentos:

Buscamos hallar los desplazamientos y giros en los nodos de los elementos a partir de la ecuacion:

$$\mathbf{K}^{(e)} \mathbf{a}^{(e)} - \mathbf{f}^{(e)} = \mathbf{q}^{(e)}$$

Calculo de Matriz de rigidez de elementos discretizados, a partir de la matriz de rigidez de flexion y de corte:

$$\mathbf{K}^{(e)} = \mathbf{K}_b^{(e)} + \mathbf{K}_s^{(e)}$$

$$\mathbf{K}_b^{(e)} = \int \int_{A^{(e)}} \mathbf{B}_b^T \hat{\mathbf{D}}_b \mathbf{B}_b dA \quad \mathbf{K}_s^{(e)} = \int \int_{A^{(e)}} \mathbf{B}_s^T \hat{\mathbf{D}}_s \mathbf{B}_s dA$$

donde:

$$\mathbf{D}_b = \frac{E}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix} \quad \mathbf{D}'_s = \begin{bmatrix} G & 0 \\ 0 & G \end{bmatrix} \quad G = \frac{E}{2(1-\nu)} \quad \Rightarrow \quad \hat{\mathbf{D}}_b = \frac{t^3}{12} \mathbf{D}_b$$

$$\hat{\mathbf{D}}_s = t \mathbf{D}_s$$

$$\mathbf{B}_{bi} = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{\partial N_i}{\partial x} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{\partial N_i}{\partial y} \\ 0 & -\frac{\partial N_i}{\partial y} & -\frac{\partial N_i}{\partial x} \end{bmatrix} \quad \mathbf{B}_{si} = \begin{bmatrix} -\frac{\partial N_i}{\partial x} & N_i & 0 \\ -\frac{\partial N_i}{\partial y} & 0 & N_i \end{bmatrix} \quad \mathbf{B}_i = \begin{Bmatrix} \mathbf{B}_{bi} \\ \dots \\ \mathbf{B}_{si} \end{Bmatrix}$$

Calculo del vector de fuerza nodal:

$$\mathbf{f}_i^{(e)} = \int \int_{A^{(e)}} \mathbf{N}_i [q, 0, 0]^T dA$$

Calculo del vector de fuerzas externas:

$$\mathbf{q}_i^{(e)} = [P_i, 0, 0]^T$$

Conociendo la matriz y vector de fuerzas ensamblados a partir de los elementos discretizados, conoceremos los desplazamientos en los nudos $\mathbf{a}^{(e)}$

Posteriormente hallamos los vectores de deformacion y con este ultimo el vector de Momentos y Cortantes de equilibrio:

$$\hat{\boldsymbol{\epsilon}} = \begin{Bmatrix} \hat{\boldsymbol{\epsilon}}_b \\ \hat{\boldsymbol{\epsilon}}_s \end{Bmatrix} = \mathbf{B}\mathbf{a}^{(e)}$$

$$\hat{\boldsymbol{\sigma}} = \hat{\mathbf{D}}\hat{\boldsymbol{\epsilon}} = \begin{Bmatrix} \hat{\mathbf{D}}_b \hat{\boldsymbol{\epsilon}}_b \\ \dots \\ \hat{\mathbf{D}}_s \hat{\boldsymbol{\epsilon}}_s \end{Bmatrix} \rightarrow \hat{\boldsymbol{\sigma}} = \begin{Bmatrix} \hat{\boldsymbol{\sigma}}_b \\ \hat{\boldsymbol{\sigma}}_s \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} M_x \\ M_y \\ M_{xy} \\ \dots \\ Q_{xz} \\ Q_{yz} \end{Bmatrix}$$

d. Calculo de Desplazamientos v giros, interpolados:

Conociendo los valores de los desplazamientos $\mathbf{a}^{(e)}$, y conociendo los valores de las funciones de forma, podremos conocer el valor de las desplazamientos y giros en cualquier punto del interior de la placa, mediante la interpolacion de los valores obtenidos en los nodos:

$$\mathbf{u} = [\mathbf{N}_1, \mathbf{N}_2, \dots, \mathbf{N}_n] \begin{Bmatrix} \mathbf{a}_1 \\ \dots \\ \mathbf{a}_n \end{Bmatrix} = \mathbf{N}\mathbf{a}^{(e)} \quad \mathbf{a}_i^{(e)} = \begin{Bmatrix} w_i \\ \theta_{xi} \\ \theta_{yi} \end{Bmatrix}$$

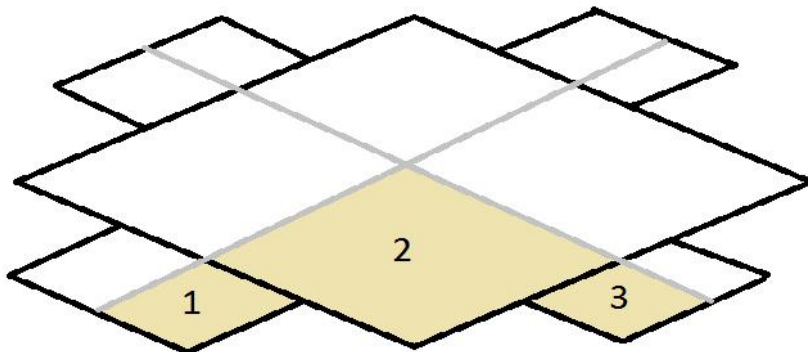
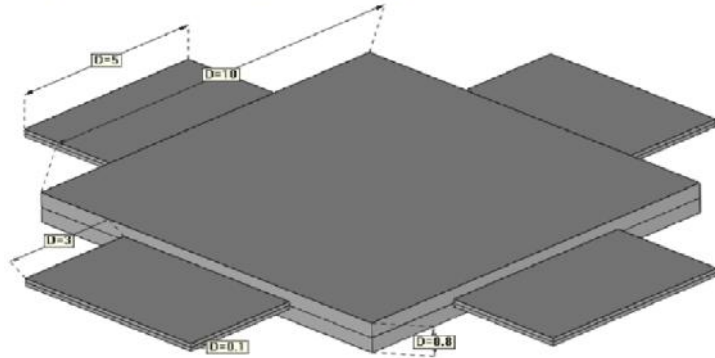
$$\mathbf{u} = \begin{Bmatrix} w \\ \theta_x \\ \theta_y \end{Bmatrix}$$

Assignment

a) Think first and answer later.

What kind of strategy (theory, elements, integration rule, boundary conditions, etc) will you use for solving the following problems:

a.2

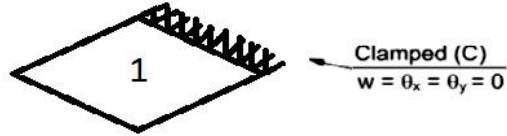


De esta manera nos centraremos en el analisis de las porciones de voladizos 1 y 3 ademas de la porcion de la placa grande 2.

I. Analisis de las Placas Voladizas (1 y 3):

a. Modelo Matematico:

Analizamos los volados de manera aislada con la idealizacion de un voladizo empotrado, este elemento se debere de discretizar adecuadamente:



b. Metodo de Analisis:

Por tratarse de un elemento delgado de 10 cm, presentara principalmente esfuerzos normales por flexion, por lo que emplearemos el metodo de Kirchhoff.

c. Calculo de Momentos:

Buscamos hallar los desplazamientos y giros en los nodos de los elementos a partir de la ecuacion:

$$\mathbf{K}^{(e)} \mathbf{a}^{(e)} - \mathbf{f}^{(e)} = \mathbf{q}^{(e)}$$

Calculo de Matriz de rigidez de elementos discretizados:

$$\mathbf{K}_q^{(e)} = \iint_{A^{(e)}} \mathbf{B}_i^T \hat{\mathbf{D}}_i \mathbf{B}_i dx dy$$

donde:

$$\mathbf{D} = \frac{E}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix} \Rightarrow \hat{\mathbf{D}}_i = \frac{t^3}{12} \mathbf{D}$$

$$\mathbf{B}_i = \begin{bmatrix} -\frac{\partial^2 N_i}{\partial x^2} & -\frac{\partial^2 \bar{N}_i}{\partial x^2} & -\frac{\partial^2 \bar{\bar{N}}_i}{\partial x^2} \\ -\frac{\partial^2 N_i}{\partial y^2} & -\frac{\partial^2 \bar{N}_i}{\partial y^2} & -\frac{\partial^2 \bar{\bar{N}}_i}{\partial y^2} \\ -2 \frac{\partial^2 N_i}{\partial x \partial y} & -2 \frac{\partial^2 \bar{N}_i}{\partial x \partial y} & -2 \frac{\partial^2 \bar{\bar{N}}_i}{\partial x \partial y} \end{bmatrix}$$

Calculo del vector de fuerza nodal:

$$\mathbf{f}^{(e)} = \begin{Bmatrix} \bar{P}_1 \\ \bar{M}_{x1} \\ \bar{M}_{y1} \end{Bmatrix} = \iint_{A^{(e)}} \mathbf{N}_i^T \mathbf{q} dx dy = \iint_{A^{(e)}} \mathbf{q} \begin{Bmatrix} N_i \\ \bar{N}_i \\ \bar{\bar{N}}_i \end{Bmatrix} dx dy$$

Calculo del vector de fuerzas externas:

$$\mathbf{q}^{(e)} = [\bar{P}_x, \bar{M}_{x_i}, \bar{M}_{y_i}]^T$$

Asi tambien para el caso de fuerzas distribuidas:

$$\mathbf{q}^{(e)} = 4qab \left[\frac{1}{4}, \frac{a}{12}, \frac{b}{12}, \frac{1}{4}, -\frac{a}{12}, \frac{b}{12}, \frac{1}{4}, -\frac{a}{12}, -\frac{b}{12}, \frac{1}{4}, \frac{a}{12}, -\frac{b}{12} \right]^T$$

Conociendo la matriz y vector de fuerzas ensamblados a partir de los elementos discretizados, conoceremos los desplazamientos $\mathbf{a}^{(e)}$.

Posteriormente hallamos los vectores de deformacion y con este ultimo el vector de Momentos de equilibrio:

$$\hat{\boldsymbol{\epsilon}} = \mathbf{B}\mathbf{a}^{(e)} \quad \Rightarrow \quad \hat{\boldsymbol{\epsilon}}_f = \left[-\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}, -\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}, -2\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right]^T$$

$$\hat{\boldsymbol{\sigma}}_f = \hat{\mathbf{D}}_f \hat{\boldsymbol{\epsilon}}_f \quad \Rightarrow \quad \hat{\boldsymbol{\sigma}}_f = \begin{Bmatrix} M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{Bmatrix}$$

d. Calculo de Desplazamientos y giros, interpolados:

Conociendo los valores de los desplazamientos $\mathbf{a}^{(e)}$, y conociendo los valores de las funciones de forma, podremos conocer el valor de las desplazamientos y giros en cualquier punto del interior de la placa, mediante la interpolacion de los valores obtenidos en los nodos:

$$\mathbf{N} = [\mathbf{N}_1, \mathbf{N}_2, \mathbf{N}_3, \mathbf{N}_4] \quad \mathbf{a}^{(e)} = \begin{Bmatrix} \mathbf{a}_1^{(e)} \\ \mathbf{a}_2^{(e)} \\ \mathbf{a}_3^{(e)} \\ \mathbf{a}_4^{(e)} \end{Bmatrix}$$

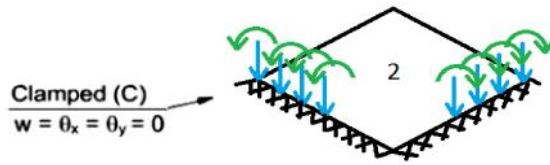
$$w = \sum_{i=1}^4 \left[N_i w_i + \bar{N}_i \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)_i + \bar{\bar{N}}_i \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)_i \right] = \mathbf{N} \cdot \mathbf{a}^{(e)} \quad \begin{cases} N_i = (1+\xi_i \xi_j)(1+\eta_i \eta_j)(2+\xi_i \xi_j + \eta_i \eta_j - \xi_i^2 - \eta_j^2)/8 \\ \bar{N}_i = a(\xi_i^2 - 1)(\xi_i + \xi_j)(1+\eta_i \eta_j)/8 \\ \bar{\bar{N}}_i = b(\eta_i^2 - 1)(\eta_i + \eta_j)(1+\xi_i \xi_j)/8 \end{cases}$$

El analisis sera el mismo para la placa voladiza 3.

II. Analisis de la Placa Grande (2):

a. Modelo Matematico:

Ahora analizamos de manera aislada la segunda placa, considerando la transeferencia de cargas de los voladizos 1 y 3, consideramos que la placa 2 se apoya sobre un elemento muy rigido (viga de gran peralte), este elemento se debera de discretizar adecuadamente:



b. Metodo de Analisis:

Por tratarse de un elemento rigido de 20cm (mayor a 10cm), por lo que estara propenso a concentrar esfuerzos cortantes, por lo que emplearemos el metodo de Raissner-Middlin.

c. Calculo de Momentos:

Buscamos hallar los desplazamientos v giros en los nodos de los elementos a partir de la ecuacion:

$$\mathbf{K}^{(e)} \mathbf{a}^{(e)} - \mathbf{f}^{(e)} = \mathbf{q}^{(e)}$$

Calculo de Matriz de rigidez de elementos discretizados, a partir de la matriz de rigidez de flexion y de corte:

$$\mathbf{K}^{(e)} = \mathbf{K}_b^{(e)} + \mathbf{K}_s^{(e)}$$

$$\mathbf{K}_b^{(e)} = \iint_{A^{(e)}} \mathbf{B}_b^T \hat{\mathbf{D}}_b \mathbf{B}_b dA \quad \mathbf{K}_s^{(e)} = \iint_{A^{(e)}} \mathbf{B}_s^T \hat{\mathbf{D}}_s \mathbf{B}_s dA$$

donde:

$$\mathbf{D}_b = \frac{E}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix} \quad \mathbf{D}'_s = \begin{bmatrix} G & 0 \\ 0 & G \end{bmatrix} \quad G = \frac{E}{2(1-\nu)} \quad \Rightarrow \quad \begin{aligned} \hat{\mathbf{D}}_b &= \frac{t^3}{12} \mathbf{D}_b \\ \hat{\mathbf{D}}_s &= t \mathbf{D}_s \end{aligned}$$

$$\mathbf{B}_{bi} = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{\partial N_i}{\partial x} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{\partial N_i}{\partial y} \\ 0 & -\frac{\partial N_i}{\partial y} & -\frac{\partial N_i}{\partial x} \end{bmatrix} \quad \mathbf{B}_{si} = \begin{bmatrix} -\frac{\partial N_i}{\partial x} & N_i & 0 \\ -\frac{\partial N_i}{\partial y} & 0 & N_i \end{bmatrix} \quad \mathbf{B}_i = \left\{ \begin{array}{l} \mathbf{B}_{bi} \\ \dots \\ \mathbf{B}_{si} \end{array} \right\}$$

Calculo del vector de fuerza nodal:

$$\mathbf{f}_i^{(e)} = \iint_{A^{(e)}} \mathbf{N}_i [q, 0, 0]^T dA$$

Calculo del vector de fuerzas externas:

$$\mathbf{q}_i^{(e)} = [P_i, 0, 0]^T$$

Conociendo la matriz y vector de fuerzas ensamblados a partir de los elementos discretizados, conoceremos los desplazamientos en los nudos $\mathbf{a}^{(e)}$

Posteriormente hallamos los vectores de deformacion y con este ultimo el vector de Momentos y Cortantes de equilibrio:

$$\hat{\boldsymbol{\epsilon}} = \begin{Bmatrix} \hat{\boldsymbol{\epsilon}}_b \\ \hat{\boldsymbol{\epsilon}}_s \end{Bmatrix} = \mathbf{B}\mathbf{a}^{(e)}$$

$$\hat{\boldsymbol{\sigma}} = \hat{\mathbf{D}}\hat{\boldsymbol{\epsilon}} = \begin{Bmatrix} \hat{\mathbf{D}}_b \hat{\boldsymbol{\epsilon}}_b \\ \dots \\ \hat{\mathbf{D}}_s \hat{\boldsymbol{\epsilon}}_s \end{Bmatrix} \rightarrow \hat{\boldsymbol{\sigma}} = \begin{Bmatrix} \hat{\boldsymbol{\sigma}}_b \\ \hat{\boldsymbol{\sigma}}_s \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} M_x \\ M_y \\ M_{xy} \\ \dots \\ Q_{xz} \\ Q_{yz} \end{Bmatrix}$$

d. Calculo de Desplazamientos v giros, interpolados:

Conociendo los valores de los desplazamientos $\mathbf{a}^{(e)}$, y conociendo los valores de las funciones de forma, podremos conocer el valor de las desplazamientos y giros en cualquier punto del interior de la placa, mediante la interpolacion de los valores obtenidos en los nodos:

$$\mathbf{u} = [\mathbf{N}_1, \mathbf{N}_2, \dots, \mathbf{N}_n] \begin{Bmatrix} \mathbf{a}_1 \\ \dots \\ \mathbf{a}_n \end{Bmatrix} = \mathbf{N}\mathbf{a}^{(e)} \quad \mathbf{a}_i^{(e)} = \begin{Bmatrix} w_i \\ \theta_{xi} \\ \theta_{yi} \end{Bmatrix}$$

$$\mathbf{u} = \begin{Bmatrix} w \\ \theta_x \\ \theta_y \end{Bmatrix}$$

Assignment

- b) Define and verify a patch test mesh for the MCZ element.

La prueba del parche es aquella evaluación que se aplica a los elementos no conformes, con la finalidad de que, al satisfacer dicho test, se pueda asegurar que el elemento placa, todavía puede converger a la solución correcta.

La prueba del parche se cumple si los desplazamientos y las deformaciones dentro del parche coinciden con los valores exactos deducidos del campo de desplazamiento prescrito

Considerando que los elementos evaluados, son placas tipo MZC de forma rectangular, se considera que estas satisficieran los pach test, por lo que podran converger a la solución correcta.